

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

И. А. Шведов

КОМПАКТНЫЙ КУРС

МАТЕМАТИЧЕСКОГО

АНАЛИЗА

Часть I

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Новосибирск  
2003

УДК 517(075.8)  
ББК В 16я73-1

Шведов И. А. Компактный курс математического анализа, ч. 1.  
Функции одной переменной : Учеб. пособие / Новосиб. гос. ун-т. Ново-  
сибирск, 2001. 112 с.

Учебное пособие предназначено студентам 1@-го курса математи-  
ческих факультетов университетов, а также всем желающим углубить  
свои познания в математическом анализе и несколько расширить свой  
кругозор.

Рецензент  
доцент Л. В. Войтишек

© Новосибирский государственный  
университет, 2003

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	8
Глава 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ .....	9
§ 0.0. О терминологии и обозначениях .....	9
Высказывания, аксиомы, теоремы. Стандартные обозначения. Постоянные и переменные. Способы задания множеств. Принцип совпадения множеств.	
§ 0.1. Числовая прямая .....	11
Свойства системы вещественных чисел. Расширенная числовая прямая; отношение порядка; арифметические операции; модуль и знак числа. Промежутки. Ограниченные подмножества. Верхняя и нижняя грани числового множества. Аксиома граней. Индуктивное свойство натурального ряда. Принцип Архимеда. Принцип математической индукции; биномиальные коэффициенты. Теорема о пересекающихся отрезках; принцип вложенных отрезков. Диаметр числового множества. Окрестности точек расширенной числовой прямой. Свойства системы окрестностей.	
§ 0.2. Отображения .....	15
Понятие отображения; бытующая терминология. Область задания отображения; пространство значений; образы и прообразы точек и множеств; график отображения. Сужение отображений. Постоянные, инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратимые отображения; критерий обратимости.	
Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ .....	19
§ 1.1. Предел последовательности .....	19
Топологическое определение предела последовательности. Единственность предела. Предел монотонной последовательности. Лемма о пределе промежуточной последовательности. Асимптотическая истинность высказываний. Теорема о неравенстве пределов (ГНП). Арифметический критерий сходимости. (АКС) Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе подпоследовательности. Теорема Вейерштрасса о частичных пределах; верхний и нижний пределы вещественной последовательности. Критерий Коши существования конечного предела; последовательности Коши.	

Приложение .....	25
Вещественные числа по Вейерштрассу.	
§ 1.2. Суммирование бесконечных числовых рядов. ....	26
Примеры появления сумм бесконечных числовых рядов. Основные вопросы. Популярные разложения в степенные ряды (формулировки). Об употреблении термина "ряд". Частичные суммы ряда. Сумма ряда. Суммируемые (сходящиеся) ряды; необходимое условие суммируемости. Сумма геометрической прогрессии. Условие суммируемости ряда $1/n^s$ . Критерий Коши суммируемости ряда. Принцип сравнения. Абсолютно суммируемые ряды. Признаки Коши и Даламбера суммируемости ряда. Неравенство Абеля; признак Абеля–Дирихле; типичные примеры. Теорема Мертенса о произведении рядов.	
Приложения .....	34
Область суммируемости экспоненциального ряда; экспонента; ее свойства. Иррациональность числа $e$ . Трансцендентность числа Лиувилля. Сходимость последовательностей и суммирование рядов в поле комплексных чисел.	
Глава 2. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ .....	35
§ 2.1. Свойства операции $\lim$ .....	35
Точки прикосновения подмножеств расширенной числовой прямой. Асимптотическая истинность высказываний. Предел функции по подмножеству. Единственность предела. Пределы монотонных функций. Лемма о пределе промежуточной функции (ЛППФ). Теорема о неравенстве пределов (ТНП). Арифметический критерий сходимости (АКС). Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе композиции. Критерий сходимости Гейне.	
§ 2.2. Асимптотические отношения сравнения .....	43
Свойства асимптотических сравнений; связь с операцией предела.	
Глава 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ .....	45
§ 3.1. Непрерывность функции в точке .....	45
Топологический критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных функций. Лемма о непрерывности промежуточной функции. Операции над непрерывными функциями. Лемма об устойчивости строгих неравенств. Локальный характер свойства непрерывности. Лемма о пределе огибающих.	

§ 3.2. Глобальная непрерывность .....	47
Теорема Вейерштрасса об экстремумах. Теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема об обратной функции.	
§ 3.3. Основные элементарные функции .....	49
Функции $x^n$ и $\sqrt[n]{x}$ . Экспонента и натуральный логарифм. Теорема–определение показательной функции; $\log_a$ . Функции $\sin$ и $\arcsin$ ; $\cos$ и $\arccos$ ; $\tan$ и $\arctan$ .	
Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ .....	51
§ 4.1. Производная и дифференциал .....	51
Дифференцируемые функции; производная. Односторонние производные. Теорема о лейбницевои разложении; дифференциал. Кинематическая и геометрическая интерпретации производной и дифференциала; касательная к графику дифференцируемой функции. Непрерывность дифференцируемых функций. Правила дифференцирования. Локальный характер дифференциальных понятий. Лемма о производной промежуточной функции. Лемма о знаке производной. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы Ролля и Лагранжа о среднем. Теорема о приращениях.	
Приложения .....	59
Признаки возрастания и убывания. Достаточные признаки локального экстремума. Выпуклые множества и функции; барцентрический критерий выпуклости; неравенство Иенсена. Дифференциальные признаки выпуклости; неравенство Юнга. Правило Лопиталья.	
§ 4.2. Многократная дифференцируемость .....	63
Высшие производные. Правила многократного дифференцирования суммы и произведения. Признаки многократной дифференцируемости композиции и обратного отображения.	
§ 4.3. Локальная аппроксимация функций полиномами .....	65
Лемма о степенной оценке приращения. Теорема о разложении Тейлора. Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора. Порядок касания функций в точке. Операции над полиномиальными разложениями.	
Приложения .....	67
Исследование локального поведения функций посредством полиномиальных разложений. Популярные разложения в сте-	

пенные ряды; оценки остатков разложений. Формула Эйлера. Метод Мэчина "вычисления числа" $\pi$ . Интерполяция по Лагранжу - Эрмиту. Обобщенная теорема Ролля. Оценка дефекта интерполяции. Теорема об интерполяции по Лагранжу - Эрмиту.	
§ 4.4. Некоторые обобщения .....	71
Глава 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ .....	74
Введение. Метод Ньютона вычисления площадей .....	74
§ 5.1. Первообразная .....	75
Первообразная (неопределенный интеграл). Лемма о первообразных. Примеры и замечания. Правила неопределенного интегрирования. Разложение рациональной функции на простые дроби; первообразные рациональных функций. Обобщенная первообразная.	
§ 5.2. Интеграл .....	79
Интегрируемые функции (по Ньютону); интеграл; формула Ньютона - Лейбница (Н-Л). Геометрическая интерпретация интеграла. Элементарные свойства интеграла. Интеграл как функция верхнего предела. Формула интегрирования по частям (ФИЧ). Формула замены переменной.	
Приложения .....	84
Модернизированный принцип Кавальери. Интегральное представление остатка разложения Тейлора. Ньютоново разложение бинома. Иррациональность чисел $\pi$ и $e^q$ .	
§ 5.3. Признаки интегрируемости .....	87
В основном непрерывные функции. Принцип сравнения. Признак существования обобщенной первообразной. Лемма о сходящемся интеграле. Критерий Коши сходимости интеграла. Асимптотический признак Вейерштрасса. Неравенство Абеля; признак интегрируемости Абеля-Дирихле; типичные примеры.	
Приложения .....	94
Гамма-функция Эйлера; ее основное свойство; формула Стирлинга Формула прямоугольников; интеграл Римана. Формула Кеплера-Симпсона. Теорема о единственности интеграла.	
Глава 6. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....	98
Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ . Компоненты (координаты) вектор-функции; геометрическая и кинематическая терминологии; траектория. Распространение понятий и теорем предыдущих глав.	

Координатные критерии сходимости, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости. Теорема Коши о среднем; геометрическая интерпретация. Лемма о спуске; теорема о приращениях.

Приложения .....	102
Длина пути. Формулы для секториальной скорости. Формулы для площади криволинейного сектора. Работа силового векторного поля. Законы Кеплера и закон Ньютона всемирного тяготения.	
Дополнения .....	108
Счетные множества. Расширение теории интеграла Ньютона.	
Список имен .....	110
Греческий алфавит. ....	111
Литература .....	112

### **Предисловие**

Предлагаемый текст является основой первой части слагавшегося многие годы лекционного курса, читанного мною на мех-мате Новосибирского Государственного Университета.

Основные принципы которых я старался придерживаться при отборе и изложении материала таковы:

1. Учебно-научный трактат должен быть нацелен в первую очередь на изложение основных идей и достижений соответствующей отрасли науки.

2. Стиль, язык и уровень строгости изложения должны быть адекватны современному состоянию науки.

Эпитет "компактный" в заглавии книги отражает лишь мое стремление к полноте и краткости, а вовсе не оценку полученного результата. К тому же я стремился сделать формулировки утверждений как можно более удобными для устной речи, не потеряв необходимого уровня строгости. Для удобства разговорных ссылок и экзаменационных вопросов большинство теорем снабжены названиями.

Нынешнее издание отличается от первого небольшой перепланировкой материала и кое-какими усовершенствованиями доказательств.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность всем моим коллегам-математикам и особенно Ю.Г.Решетняку, которые поддерживали меня все прошлые годы неизменно доброжелательными и содержательными математическими дискуссиями.

Особая благодарность редактору этого текста К. В. Сторожуку за творческое обсуждение материала и кропотливый труд по его форматированию.

Автор



## Глава 0. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

### § 0.0. О терминологии и обозначениях

Если отвлечься от сути любой теории, то она предстанет в виде свода текстов. Текст является набором фраз (выражений). Фраза есть последовательность знаков (символов).

Более внимательное наблюдение показывает, что, в отличие от случайного набора знаков, фразы научного текста почти всегда осмысленны. Среди осмысленных фраз особое положение занимают повествовательные предложения, имеющие форму суждения о рассматриваемых предметах. Такие фразы в математике называют *высказываниями, утверждениями, формулами, соотношениями* и т. п.

#### Примеры математических высказываний.

$X = Y := X$  равно  $Y$ . Знак " $:=$ " употребляют вместо фраз "есть (равно) по определению", "является синонимом выражения" и т. п.

$a < b := a$  строго меньше  $b$ .

$a \leq b := a$  не превосходит  $b$ .

$x \in M := x$  является элементом множества  $M$ .

$x, y, z \in S := x, y, z$  суть элементы множества  $S$ .

$A \subset B :=$  множество  $A$  есть подмножество множества  $B$ .

!  $X \subset X$  для любого множества  $X$ .

Если  $V$  и  $W$  — высказывания, то следующие фразы также являются высказываниями:

$V \Rightarrow W :=$  из  $V$  следует  $W := V$  влечет  $W$ ;

$V \Leftrightarrow W := (V \Rightarrow W)$  и  $(W \Rightarrow V) := V$  в том и только в том случае, когда  $W := V$  равносильно (эквивалентно)  $W$ ;

$V$  и  $W$ ;

$V$  или  $W$ ;

$\neg V :=$  высказывание  $V$  неверно;

$\forall x \in M V :=$  для каждого (любого) элемента  $x$  множества  $M$  справедливо высказывание  $V$ ;

$\exists x \in S V :=$  существует (имеется) элемент  $x$  множества  $S$ , для которого высказывание  $V$  истинно.

К теоретическим высказываниям обычно применим вопрос: верно ли данное высказывание или при каких условиях оно верно? Например, выражение  $x^2 + y^2$  не является высказыванием.

Высказывания, которые *объявляются* истинами теории, называются *аксиомами* или *постулатами* теории. Логические следствия аксиом называются *теоремами* или *леммами*.

Развитие математических методов исследования явлений, протекающих во времени, привело, в частности, к тому, что в математическом тексте одни буквы, предназначенные для обозначения рассматриваемых объектов, объявляются константами (постоянными), а другие — переменными. Буква  $\beta$  считается *постоянной*, если подразумевается, что в данном тексте она обозначает один и тот же (фиксированный) объект. Буква  $\beta$  считается *переменной*, если она предназначена для обозначения объектов некоторого множества  $M$ , с которым приходится иметь дело. Элементы этого множества зачастую называют *значениями переменной*  $\beta$ , а букву  $\beta$  — *переменной точкой* множества  $M$ .

Вот некоторые общепринятые константы:

$0, 1, 2, \dots$ ;

$\pi = 3, 1415\dots$ ;

$\emptyset$  := пустое множество;

$\mathbb{N}$  := натуральный ряд :=  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ;

$\mathbb{R}$  := множество вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$  := множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{Q}$  := множество рациональных чисел.

В математическом анализе в качестве переменных обычно употребляют буквы  $x, y, z, t, \dots, X, Y, \dots$ .

Как правило, в математических текстах отсутствует явное разделение обозначающих букв на константы и переменные, поскольку такое разделение обуславливается контекстом. Например, исследуя полином  $ax^2 + bx + c$ , предполагают, что буквы  $a, b, c$  — константы, а буква  $x$  — переменная.

#### Стандартные обозначения и постулаты теории множеств.

$\{a, b, c, \dots\}$  := множество, образованное элементами, чьи имена помещены в фигурные скобки.

! Если  $x \in S$ , то  $\{x\} \subset S$ , но  $x \neq \{x\}$ .

$\{x \in M : W\}$  := (множество, состоящее из всех таких элементов  $x$  множества  $M$ , для которых выполнена формула  $W$ ).

$(x, y)$  := (упорядоченная пара объектов  $x$  и  $y$ , в которой  $x$  предполагается первым, а  $y$  — вторым).

$X \cap Y$  := пересечение множеств  $X$  и  $Y$ .

$A \cup B$  := объединение множеств  $A$  и  $B$ .

$S \setminus T := \{s \in S : s \notin T\}$  := разность множеств  $S$  и  $T$ .

$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$  := декартово произведение множеств  $X$  и  $Y$ .

**Принцип включения множеств.** Множество  $X$  является подмножеством множества  $Y$  тогда и только тогда, когда каждый элемент

множества  $X$  является элементом множества  $Y$ . Короче,

$$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X \quad x \in Y.$$

(Аксиома.) **Упражнение.**  $\emptyset$  является подмножеством любого множества  $M$ .

**Принцип совпадения множеств.**

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subset Y \text{ и } Y \subset X).$$

(Аксиома.)

**Соглашение о сокращениях:** Иногда в составных обозначениях мы будем опускать некоторые значки, если по контексту ясно, как их восстановить. Например, вместо знака ":@" можем употребить знак "=", а вместо  $\sum_{k=0}^n \alpha_k$  можем написать  $\sum \alpha_k$ .

### § 0.1. Числовая прямая

На множестве  $\mathbb{R}$  вещественных чисел определены:

- 1) операция сложения  $+$ ;
- 2) операция умножения  $\cdot$ ;
- 3) отношение порядка  $\leq$ .

Иначе говоря:

- 1) каждой паре чисел  $x$  и  $y$  поставлено в соответствие число  $x + y$  := сумма чисел  $x$  и  $y$ ;
- 2) каждой паре чисел  $x$  и  $y$  поставлено в соответствие число  $x \cdot y$  := произведение чисел  $x$  и  $y$ ;
- 3) для каждой пары чисел  $x$  и  $y$  определено, истинно или нет неравенство  $x \leq y$ .

Эти операции и порядок подчинены всем известным законам арифметики (*аксиомам упорядоченного поля*). Мы будем опираться также на сведения из школьной арифметики о натуральных, целых и рациональных числах. Например, утверждение "единица есть наименьшее положительное целое число" для нас является аксиомой.

Для нужд анализа понадобится еще одна аксиома. Но прежде введем ряд полезных понятий и обозначений.

Для каждого числа  $z$  положим  $z^0 := 1, z^1 := z, \dots, z^n := z \cdot z^{n-1}, \dots$ .

Для каждого натурального числа  $n$  символом  $n!$  (произносят " $n$ -факториал") обозначают произведение чисел  $1, \dots, n$ . Точнее:  $0! := 1, 1! := 1, \dots, n! := ((n-1)!) \cdot n$ .

В современной науке наряду с вещественными числами используют элементы  $\infty$  и  $-\infty$ , называемые "бесконечность" и "минус бесконечность", а множество  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  называют *расширенной числовой прямой*. При этом считается, что  $-\infty \leq x \leq \infty$  для всякого  $x \in \overline{\mathbb{R}}$ . Операции сложения и умножения распространяются на  $\overline{\mathbb{R}}$  лишь частично: остаются неопределенными выражения  $-\infty + \infty$ ,  $\infty + (-\infty)$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty \cdot 0$ ,  $-\infty \cdot 0$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0 \cdot (-\infty)$ .

Кроме того, считается, что  $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ .

*Знаком* элемента  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  называется число  $\text{sign } x$ , определяемое следующими условиями:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & , \text{ если } x > 0 \\ 0 & , \text{ если } x = 0 \\ -1 & , \text{ если } x < 0 \end{cases} .$$

*Модулем (абсолютной величиной)* элемента  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  называется число  $|x| := x \text{sign } x$ . Если  $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ , то число  $|x - y|$  называют *расстоянием* между точками  $x$  и  $y$ .

Говорят, что число  $x \in \overline{\mathbb{R}}$  лежит между числами  $a$  и  $b$ , если либо  $a \leq x \leq b$ , либо  $a \geq x \geq b$ . Множество всех точек, лежащих между  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , называют *отрезком* с концами  $a$  и  $b$  и обозначают  $[a, b]$ . Множества вида  $]a, b[ := [a, b] \setminus \{a, b\}$  будем называть *интервалами*, а множества вида  $[a, b[ := [a, b] \setminus \{b\}$  и  $]a, b] := [a, b] \setminus \{a\}$  — *полуинтервалами*. В приведенной символике вместо запятой мы будем употреблять знак  $\leq$  или  $<$ , если предполагается, что  $a \leq b$  или  $a < b$ . Множество  $T \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется *промежутком* или *выпуклым множеством*, если вместе с любыми своими точками  $x$  и  $y$  оно содержит отрезок  $[x, y]$ , их соединяющий. Отрезки, интервалы и полуинтервалы являются промежутками.

Будем говорить, что число  $u \in \overline{\mathbb{R}}$  ограничивает множество  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  снизу (слева), и писать  $u \leq S$ , если  $u \leq s$  для каждого  $s \in S$ . Будем говорить, что число  $h \in \overline{\mathbb{R}}$  ограничивает множество  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  сверху (справа), и писать  $S \leq h$ , если  $s \leq h$  для любого  $s \in S$ .

Множество  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  называется *ограниченным*, если существуют такие числа  $u, h \in \overline{\mathbb{R}}$ , что  $u \leq S \leq h$ .

Число  $h \in \overline{\mathbb{R}}$  будем называть *верхней гранью* множества  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если  $h$  — наименьшее среди всех чисел, ограничивающих множество  $S$  справа.

Число  $u \in \overline{\mathbb{R}}$  будем называть *нижней гранью* множества  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если  $u$  — наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество  $S$  слева.

**Аксиома граней.** Каждое подмножество расширенной числовой прямой обладает верхней и нижней гранями.

Верхнюю грань множества  $S$  обозначают  $\sup S$  (supremum), а нижнюю — символом  $\inf S$  (infimum).

Строго говоря,  $h = \sup S \Leftrightarrow 1) S \leq h$  и 2) для всякого числа  $r \in \overline{\mathbb{R}}$ , которое ограничивает множество  $S$  справа, выполнено неравенство  $h \leq r$ . Условие 2 является переводом на разговорный язык следующего математического утверждения:  $\forall r \in \overline{\mathbb{R}} (S \leq r \Rightarrow h \leq r)$ .

**Упражнения 0.**  $\inf[a \leq b] = a$ ,  $\sup[a \leq b] = b$ .

1.  $A \subset B \subset \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ ,  $\inf A \geq \inf B$ .

2.  $\sup \mathbb{N} = \infty$ .

3. Для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное  $n$ , что  $0 < 1/n < \varepsilon$ . Иначе:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \mid 0 < 1/n < \varepsilon$ .

4. Если  $T$  — непустой промежуток, то  $\inf T$  — его левый, а  $\sup T$  — правый конец.

5. Всегда ли  $\inf S \leq \sup S$ ?

6.  $\inf \emptyset = ?$   $\sup \emptyset = ?$

7. Всякий промежуток расширенной числовой прямой есть либо отрезок, либо интервал, либо полуинтервал.

**Натуральный ряд вполне упорядочен:** Каждое непустое подмножество  $S$  натурального ряда содержит наименьший элемент.

◀ Пусть  $u = \inf S$ . Так как  $0 \leq S \neq \emptyset$ , то  $u \in \mathbb{R}_+$  и, стало быть,  $u + 1 > u = \inf S$ . Поэтому  $S$  содержит такое натуральное число  $m$ , что  $u \leq m < u + 1$ . Достаточно установить, что  $m$  — минимальный элемент множества  $S$ . Допустим, однако, что это не так. Но тогда  $S$  содержит такое число  $k$ , что  $u \leq k < m < u + 1$ . Следовательно,  $0 < m - k < 1$ , т. е. положительное целое число  $m - k$  меньше единицы. Абсурд! ▶

**Упражнения.** 1. Непустое ограниченное множество натуральных чисел содержит наибольший элемент.

2. **Принцип Архимеда.** Если  $0 < x < y < \infty$ , то существует такое натуральное  $n$ , что  $nx \leq y < (n + 1)x$ .

3. Каждый непустой интервал содержит рациональные и иррациональные точки.

**Принцип математической индукции.** Пусть для каждого натурального числа  $n$  задано высказывание  $W(n)$  и справедливы следующие утверждения:

а)  $W(0)$  истинно;

б) для каждого  $n \in \mathbb{N}$  высказывание  $W(n + 1)$  является следствием утверждения  $W(n)$ .

Тогда  $W(n)$  истинно для любого номера  $n \in \mathbb{N}$ .

◀ Пусть  $S$  — множество всех таких натуральных  $n$ , для которых высказывание  $W(n)$  ложно. Наша цель — доказать, что  $S$  пусто. Допустим, что это не так. Тогда  $S$  содержит минимальный элемент. Обозначим его буквой  $m$ . Это натуральное число положительно, ибо  $W(0)$  истинно. Поэтому целое число  $m - 1$  неотрицательно и, значит, является натуральным. Кроме того,  $m - 1 < m$  и потому  $m - 1 \notin S$ . Это означает, что высказывание  $W(m - 1)$  истинно и, стало быть, истинно его следствие  $W(m)$ . Значит  $m \notin S$ . В то же время  $m = \min S \in S$ . ▶

**Разложение бинома.** Для всякого натурального числа  $n$  и любых  $x, y$  справедлива формула

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k},$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ . Числа  $C_n^k$  называются *биномиальными коэффициентами*. Их другое обозначение  $\binom{n}{k}$ .

**Теорема о пересекающихся отрезках.** Пересечение любого множества  $M$  попарно пересекающихся отрезков является отрезком и, стало быть, непусто.

◀ Для каждого отрезка  $I \in M$  символом  $a_i$  будем обозначать его левый конец, а символом  $b_i$  — правый.

Пусть  $A$  — множество левых, а  $B$  — множество правых концов рассматриваемых отрезков. И пусть  $\alpha := \sup A$ ,  $\beta := \inf B$  и  $X := \bigcap_{I \in M} I$  — пересечение отрезков множества  $M$ . Покажем, что  $X = [\alpha, \beta]$ .

Поскольку любые отрезки  $I, J \in M$  пересекаются, то  $a_I \leq b_J$ . Следовательно, всякая точка  $b_J$  ограничивает множество  $A$  справа и потому  $\alpha \leq b_J$  для каждого  $J \in M$ , т.е.  $\alpha$  ограничивает множество  $B$  слева и, значит,  $\alpha \leq \beta$ .

Покажем, что  $[\alpha, \beta] \subset X$ . Если  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , то для любого  $I \in M$  имеет место следующая цепочка неравенств  $a_i \leq \alpha \leq \tau \leq \beta \leq b_i$ , и, следовательно,  $\tau$  является точкой каждого отрезка  $i \in M$ .

Проверка включения  $X \subset [\alpha, \beta]$  является столь же простым упражнением. ▶

**Принцип вложенных отрезков.** Пересечение любой убывающей последовательности *отрезков* непусто.

**"Контрпример".** Последовательность промежутков

$$]0, 1[ \supset ]0, 1/2[ \supset \dots \supset ]0, 1/n[ \supset \dots$$

имеет пустое пересечение.

Диаметром множества  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  называют число  $\text{diam } S := \sup\{|x - y| : x, y \in S\}$ .

- Упражнения.** 1. Множество  $S \subset \overline{\mathbb{R}}$  ограничено  $\Leftrightarrow \text{diam } S < \infty$ .  
2. Если  $a < b$ , то  $\text{diam } ]a, b[ = b - a$ .

*Элементарной окрестностью* точки  $p \in \mathbb{R}$  будем называть всякий интервал вида  $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ , где  $\varepsilon > 0$ . Такой интервал называют также  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $p$ . *Элементарной окрестностью точки  $\infty$  (точки  $-\infty$ )* будем называть всякий полуинтервал вида  $]r < \infty[$  (вида  $]-\infty < r[$ ).

Множество  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$  называют *окрестностью точки  $p \in \overline{\mathbb{R}}$* , если оно содержит некоторую элементарную окрестность этой точки.

Например, *всякий промежуток вида  $]a, b[$  и  $]r, \pm\infty[$  является окрестностью любой своей точки, а отрезок — окрестностью любой своей "внутренней" точки.*

Множество всех окрестностей точки  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  будем обозначать символом  $\mathcal{N}(p)$ .

#### **Свойства системы окрестностей в $\overline{\mathbb{R}}$ .**

0. Всякая окрестность точки содержит эту точку.
1. Пересечение любых двух окрестностей точки является окрестностью этой точки.
2. Множество, содержащее окрестность точки, является окрестностью этой точки.
3. Каждая окрестность любой точки  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  содержит выпуклую окрестность этой точки.
4. Любые две различные точки расширенной числовой прямой обладают непересекающимися окрестностями.

#### **§ 0.2. Отображения**

Говорят, что задано *отображение  $f$*  множества  $X$  в множество  $Y$ , и пишут  $f : X \rightarrow Y$ , если каждому  $x \in X$  поставлен в соответствие (сопоставлен, приписан, отнесен и т. п.) ровно один элемент  $y = f(x) \in Y$ . Последнее также выражают словами: для каждого  $x \in X$  задан (определен, указан, выбран и т. п.) один элемент  $y = f(x)$  множества  $Y$ . Отображение множества  $X$  в множество  $Y$  называют также *функцией*, заданной на  $X$  и принимающей значения в  $Y$ .

Таким образом, следующие высказывания являются математическими синонимами:

- 1)  $f : X \rightarrow Y$ ;
- 2)  $f$  — отображение множества  $X$  в множество  $Y$ ;

- 3)  $f$  — функция на множестве  $X$  со значениями в множестве  $Y$ ;
- 4)  $f$  —  $Y$ -значная функция на  $X$ ;
- 5)  $\forall x \in X \exists! y = f(x) \in Y$  ( $\exists!$  := существует ровно один).

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — произвольное отображение.

1. Множество  $X$  называют *областью определения (задания) отображения  $f$*  и обозначают  $\text{Dom } f$  (*Domain*).

2. Множество  $Y$  будем называть *пространством значений отображения  $f$* .

3. Элемент  $f(x)$  называется *образом элемента  $x$*  при отображении  $f$  или *значением функции  $f$  в точке  $x$* . В такой ситуации говорят также, что  $f$  переводит  $x$  в  $f(x)$  или что  $x$  переходит в  $f(x)$ , и пишут  $x \mapsto f(x)$ . Иногда бывает удобно вместо  $f(x)$  использовать обозначение  $f|_x$  или  $f_x$ .

4. *Образом множества  $S$*  называют множество  $f(S)$ , состоящее из образов точек множества  $S \cap X$ , т. е. множество  $f(S) := \{f(x) \in Y : x \in S \cap X\}$ . Множество  $f(X)$  называют *множеством значений отображения  $f$* .

Зачастую множество значений отображения не заполняет пространство значений, т. е.  $f(X) \neq Y$ . Множество  $f(X)$  некоторые авторы называют *областью значений отображения  $f$* , а некоторые этим термином называют множество  $Y$ .

5. *Прообразом точки  $y$*  при отображении  $f$  называют множество  $f^{-1}(y) := \{x \in X : y = f(x)\}$ .

6. *Прообразом множества  $T$*  при отображении  $f$  будем называть множество  $f^{-1}(T) := \{x \in X : f(x) \in T\}$ .

7. Множество  $\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x)\}$  называется *графиком отображения (функции)  $f$* .

Для того чтобы задать функцию  $f$ , нужно:

- 1) определить  $\text{Dom } f$ ;
- 2) указать пространство значений;
- 3) описать соответствие  $y = f(x)$ , т. е. указать, чему равно значение  $f(x)$  этой функции в каждой точке  $x \in \text{Dom } f$ .

Таким образом,  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  в современной математике считаются различными функциями.

В тех случаях, когда область определения и пространство значений рассматриваемого отображения предполагаются известными, вместо фразы " $f: X \rightarrow Y$ " употребляют выражения "функция  $f$ ", "функция  $f(x)$ ", "функция  $y = f(x)$ ". В двух последних фразах буква  $x$  не обозначает никакого конкретного элемента множества  $X = \text{Dom } f$ .



Наличие буквы  $x$  означает лишь то, что этой буквой может быть обозначена любая точка множества  $\text{Dom } f$ . По этой причине в подобных случаях букву  $x$  называют переменной точкой множества  $X$ . Называют ее также *аргументом функции*  $f(x)$ . Разумеется, наряду с буквами  $x$  и  $y$  часто пользуются другими буквами и значками.

Образование  $\varphi: A \rightarrow B$  называют *сужением отображения*  $f: X \rightarrow Y$ , если  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  и  $\varphi(x) = f(x) \forall x \in A$ . В этом случае вместо  $\varphi: A \rightarrow B$  обычно пишут  $f: A \rightarrow B$ . Сужение вида  $f: A \rightarrow Y$  обозначают также  $f|_A$ . Если в каком-либо рассуждении встречаются отображения  $f: A \rightarrow B$  и  $f: S \rightarrow T$ , то негласно предполагается, что они являются сужениями некоторого третьего отображения  $f: X \rightarrow Y$ .

Образование  $f: X \rightarrow Y$  называют:  
*постоянным* и пишут  $f = \text{const}$ , если  $f(p) = f(q)$  для любых  $p, q \in X$ ;  
*инъективным*, если оно разные точки переводит в разные;  
*сюръективным или отображением "на"*, если  $f(X) = Y$ ;  
*биективным или биекцией*, если оно инъективно и сюръективно;  
*тождественным*, если  $Y = X$  и  $f(x) = x$  для каждого  $x \in X$ . Тождественное отображение множества  $X$  в себя обычно обозначают символом  $\text{id}_X$ .

- Примеры.** 1. Функция  $\text{sign } x$  постоянна на полуинтервале  $[-\infty, 0]$ .  
 2. Отображение  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неинъективно и несюръективно.  
 3. Отображение  $\cos: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  инъективно, но несюръективно.  
 4. Отображение  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  сюръективно, но не инъективно.  
 5. Отображение  $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  биективно.  
 6. Тождественное отображение любого множества биективно.

**Приложение.** Пусть

$$N_0 := \emptyset, N_1 := \{1\}, N_2 := \{1, 2\}, \dots, N_k := \{1, \dots, k\}, \dots$$

Множество  $S$  называют *конечным*, если существует биекция (*перечисление*)  $\beta: N_k \rightarrow S$ . В этом случае номер  $k$  называют *числом (количеством) элементов* множества  $S$ .

**Упражнения.** 1. Число элементов конечного множества не зависит от способа перечисления.

2. Каждое непустое конечное множество вещественных чисел можно занумеровать (перечислить) в порядке возрастания.

*Композицией* отображений  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: T \rightarrow U$  называют отображение  $g \circ f$ , определяемое следующим образом:  
 $\text{Dom } g \circ f := \{x \in X: f(x) \in T\}$ ;

$g \circ f|_x := g(f(x))$  для каждого  $x \in \text{Dom } g \circ f$ ;  
пространство значений отображения  $g \circ f$  есть множество  $U$ .

**Свойства композиции.**

1. Ассоциативность:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
2. Для любого отображения  $f: X \rightarrow Y$  имеем  $id_Y \circ f = f \circ id_X = f$ .

Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *обратимым*, если имеется такое отображение  $g: Y \rightarrow X$ , что  $g \circ f = id_X$  и  $f \circ g = id_Y$ . В этом случае отображение  $g$  называют *обратным* к отображению  $f$  и зачастую обозначают  $f^{-1}$ .

Знак  $f^{-1}$  входит также в обозначение прообразов точек и подмножеств пространства значений отображения  $f$ . Употребление символа  $f^{-1}$  в последнем случае не означает, что  $f$  обратимо.

**Критерий обратимости отображения.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  обратимо в том и только в том случае, когда оно биективно.

Примеры обратимых отображений:

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1],$$

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1],$$

$$\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$2^x: \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[.$$

Обратные к этим отображениям обозначаются  $\arcsin$ ,  $\arccos$ ,  $\arctan$ ,  $\log_2$ .

**Упражнения.** 1. Множество  $M \subset X \times Y$  является графиком некоторого отображения  $f: X \rightarrow Y \Leftrightarrow \forall x \in X \exists! y \in Y \mid (x, y) \in M$ .

2. Отображение  $f: X \rightarrow Y$  обратимо  $\Leftrightarrow$  инверсия  $\sigma: X \times Y \rightarrow Y \times X$ , определяемая формулой  $\sigma(x, y) = (y, x)$ , преобразует график  $\Gamma_f$  в множество  $\sigma(\Gamma_f)$ , являющееся графиком некоторого отображения  $g: Y \rightarrow X$ . В этом случае отображения  $f$  и  $g$  взаимно обратны.

## Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### § 1.1. Предел последовательности

*Последовательностью точек множества  $S$*  называют функцию вида  $x: M \rightarrow S$ , где  $M \subset \mathbb{Z}$ . Значение такой функции в точке  $n \in M$  обычно обозначают  $x_n$ , а не  $x(n)$ , и называют  $n$ -м членом последовательности.

Как правило, мы будем иметь дело с бесконечными последовательностями вида  $x: \{k, k+1, k+2, \dots\} \rightarrow S$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , и говорить "последовательность  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, \dots$ " или "последовательность  $x_n$ ", считая букву  $n$  переменной точкой натурального ряда.

**Топологическое определение предела.** Будем говорить, что последовательность  $x_n$  сходится (стремится) к  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности, и писать  $x_n \rightarrow a \mid_{n \rightarrow \infty}$  или  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , если для любой окрестности  $U$  точки  $a$  найдется такой номер  $m \in \mathbb{N}$ , что для каждого номера  $n \geq m$  точка  $x_n$  лежит в  $U$ . Иначе

$$\forall U \in \mathcal{N}(a) \exists m \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq m \ x_n \in U.$$

Точку  $a$  в этом случае называют *пределом* последовательности  $x_n$  при  $n$  стремящемся к бесконечности и обозначают символом  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

*Приписку вида " $n \rightarrow \infty$ " мы иногда будем опускать там, где ясно, что она нужна, и не менее ясно, какая именно приписка нужна.*

**Теорема о единственности предела.** Если  $x_n \rightarrow a$  и  $x_n \rightarrow b$ , то  $a = b$ .

◀ Пусть  $U$  и  $V$  — произвольные окрестности точек  $a$  и  $b$  соответственно. Согласно определению предела, существуют такие номера  $m_1$  и  $m_2$ , что  $x_n \in U$  для любого  $n \geq m_1$  и  $x_n \in V$  для любого  $n \geq m_2$ . Пусть  $n$  — какой-нибудь номер, следующий за  $m_1$  и  $m_2$ , например  $n = \max(m_1, m_2)$ . Тогда  $x_n \in U \cap V$ . Следовательно, любые окрестности точек  $a$  и  $b$  пересекаются и, стало быть,  $a = b$ , поскольку в  $\overline{\mathbb{R}}$  любые две различные точки обладают непересекающимися окрестностями. ▶

Последовательность  $x_n$  будем называть *убывающей (строго убывающей)*, если для любых  $m, n \in \mathbb{N}$  из условия  $m < n$  следует неравенство  $x_m \geq x_n$  ( $x_m > x_n$ ).

**Упражнение.** Дать определение возрастающей и строго возрастающей последовательности.

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными*.

**Теорема о пределе монотонной последовательности.** На расширенной числовой прямой всякая монотонная последовательность имеет предел.

◀ Пусть  $x_n$  — возрастающая последовательность и  $X := \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ . Покажем, что точка  $h = \sup X$  является пределом этой последовательности.

Если  $h = -\infty$ , то  $x_n = h$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$  и потому  $x_n \rightarrow h$ . Пусть  $h > -\infty$  и  $U$  — произвольная окрестность точки  $h$ . В этом случае  $U$  содержит некоторый отрезок вида  $[r < h]$ . Поскольку  $r < h = \sup X$ , то найдется такой номер  $m \in \mathbb{N}$ , что  $r < x_m$ . Последовательность  $x_n$  возрастает. Поэтому для каждого  $n \geq m$  имеем  $x_m \leq x_n \leq h$  и, следовательно,  $x_n \in [r, h] \subset U$ .

Если  $x_n$  — убывающая последовательность, то по аналогичным соображениям точка  $\inf X$  является ее пределом. ▶

Пусть для каждого  $n \in \mathbb{N}$  задано некоторое высказывание  $\Phi(n)$  (например,  $x_n \in U$ ). Будем говорить, что  $\Phi(n)$  истинно для всех  $n$ , начиная с некоторого номера, или  $\Phi(n)$  верно для всех достаточно больших  $n$ , и писать:  $\Phi(n) |_{n \rightarrow \infty}$  или  $(\Phi(n))_{n \rightarrow \infty}$ , если существует такой номер  $m$ , что для любого  $n$ , следующего за  $m$ , справедливо высказывание  $\Phi(n)$ , т. е. если

$$\exists m \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq m \Phi(n).$$

Высказывания вида  $\Phi(n) |_{n \rightarrow \infty}$  будем называть асимптотическими. Если высказывание  $\Phi(n)$  содержит знак вида  $\leq, \in, =$ , и т.п., то приписку  $n \rightarrow \infty$  часто бывает удобнее помещать под этим знаком.

**Упражнения.** 0. Если высказывание  $\Phi(n)$  справедливо для любого  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\Phi(n) |_{n \rightarrow \infty}$ .

1.  $(2^n > 10^9) |_{n \rightarrow \infty}$ . Каково  $m \in \mathbb{N}$ , начиная с которого, будет истинно это неравенство?

2. Если  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} y_n$  и  $x_n \rightarrow a$ , то  $y_n \rightarrow a$ .

3.  $x_n \rightarrow a \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}(a) x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\in} U$ .

**Теорема о неравенстве пределов (ТНП).** Пусть  $x_n$  и  $y_n$  — такие числовые последовательности, что  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ . Тогда

1) если  $a < b$ , то  $x_n < y_n |_{n \rightarrow \infty}$ ;

2) если  $x_n \leq y_n |_{n \rightarrow \infty}$ , то  $a \leq b$ .

◀ 1) Пусть  $a < b$  и  $c$  — какое-либо число из интервала  $]a < b]$ . Полуинтервалы  $U := [-\infty, c]$  и  $V := ]c, \infty]$  являются окрестностями точек  $a$  и  $b$  соответственно. Так как  $x_n \rightarrow a$ , а  $y_n \rightarrow b$ , то имеются такие номера  $m_1, m_2$ , что  $x_n \in U$  при любом  $n \geq m_1$ , а  $y_n \in V$  при любом  $n \geq m_2$ .

Следовательно, для каждого  $n \geq \max(m_1, m_2)$  справедливо неравенство  $x_n < y_n$ , т.е.  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{<} y_n$ .

2) Пусть  $x_n \leq y_n$  для всех  $n$ , начиная с некоторого  $m_1$ . Допустим, что  $b < a$ . Согласно пункту 1)  $y_n < x_n|_{n \rightarrow \infty}$ , т.е. существует такой номер  $m_2$ , что  $y_n < x_n$  для каждого  $n \geq m_2$ . Таким образом, в данной ситуации для номера  $m := \max(m_1, m_2)$  выполняются неравенства  $x_m \leq y_m$  и  $y_m < x_m$ . Абсурд! Значит,  $a \leq b$ . ►

**Следствие.** В  $\mathbb{R}$  всякая последовательность  $x_n$ , имеющая конечный предел, ограничена, т.е.  $(\exists c \in \mathbb{R} \mid |x_n| < c \forall n \in \mathbb{N})$ .

**Лемма о пределе промежуточной последовательности (ЛППП).**

Пусть  $x_n, u_n, v_n$  — такие последовательности, что  $(x_n \in [u_n, v_n])_{n \rightarrow \infty}$  и  $\lim u_n = \lim v_n = a$ . Тогда  $a = \lim x_n$ .

◄ Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $a$  и пусть  $V$  — некоторая выпуклая окрестность этой точки (например, элементарная ес окрестность), лежащая в  $U$ .

Расшифровав условия теоремы, видим, что имеются такие номера  $m_1, m_2, m_3$ , что справедливы следующие утверждения:

- 1)  $x_n \in [u_n, v_n]$  для каждого  $n \geq m_1$ ;
- 2)  $u_n \in V$  для каждого  $n \geq m_2$ ;
- 3)  $v_n \in V$  для каждого  $n \geq m_3$ .

Следовательно, для каждого  $n \geq \max(m_1, m_2, m_3)$  выполнены все три отмеченные соотношения. Поэтому, ввиду выпуклости множества  $V$ , для каждого указанного номера  $n$  имеем  $x_n \in [u_n, v_n] \subset V \subset U$ . ►

**Арифметический критерий сходимости (АКС).** Пусть  $x_n$  — произвольная последовательность точек числовой прямой. Тогда

- 1)  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \mid x_n - a \mid \leq \varepsilon \mid_{n \rightarrow \infty}$ ;
- 2)  $x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \ t \leq x_n \mid_{n \rightarrow \infty}$ ;
- 3)  $x_n \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \ (x_n \leq t)_{n \rightarrow \infty}$ .

◄ 1) Допустим, что  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  и пусть  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$  — произвольное положительное число). Поскольку в этом случае отрезок  $U_\varepsilon := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  является окрестностью точки  $a$ , то согласно определению предела  $(x_n \in U_\varepsilon)_{n \rightarrow \infty}$ . Последнее равносильно утверждению  $(\mid x_n - a \mid \leq \varepsilon)_{n \rightarrow \infty}$ .

Допустим теперь, что для каждого  $\varepsilon > 0$  выполняется асимптотическое неравенство  $\mid x_n - a \mid \leq \varepsilon \mid_{n \rightarrow \infty}$ , и пусть  $U \in \mathcal{N}(a)$  ( $U$  — произвольная окрестность точки  $a$ ). Существует столь малое  $\varepsilon > 0$ , что  $U_\varepsilon := [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset U$ . Из нашего допущения следует, что  $(x_n \in U_\varepsilon)_{n \rightarrow \infty}$ . Следовательно,  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\in} U_\varepsilon \subset U$ . Так как  $U$  — произвольная окрестность точки  $a$ , то  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ .

2) Допустим, что  $x_n \rightarrow \infty$  и пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Поскольку отрезок  $V_t := [t, \infty]$  является окрестностью точки  $\infty$ , то  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\in} V_t$ . Последнее равносильно утверждению  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\geq} t$ .

Допустим теперь, что для каждого  $t \in \mathbb{R}$  выполняется асимптотическое неравенство  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\geq} t$ . Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $\infty$ . Существует столь большое число  $t \in \mathbb{R}$ , что отрезок  $V_t := [t, \infty] \subset U$ . Отсюда и из нашего допущения следует, что  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\in} V_t \subset U$ . Так как  $U$  — произвольная окрестность точки  $\infty$ , то  $x_n \rightarrow \infty$ .

Утверждение 3) доказывается аналогично. ►

**Упражнение.** Без ущерба для истины в АКС знак  $\leq$  можно заменить знаком  $<$ .

**Следствия.** 1.  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |x_n - a| \rightarrow 0$ .

2. Если  $x_n \rightarrow a$ , то  $|x_n| \rightarrow |a|$ .

**Теорема о сумме пределов.** Сумма пределов является пределом суммы: если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  и если сумма  $a + b$  определена, то  $x_n + y_n \rightarrow a + b$ . (Неудачная формулировка: предел суммы равен сумме пределов.)

◀ Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и пусть  $\varepsilon > 0$ . Опираясь на АКС, получаем

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| \underset{n \rightarrow \infty}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно АКС  $x_n + y_n \rightarrow a + b$ .

Предположим, что  $b = \infty$ ,  $a > -\infty$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $c \in ]-\infty, a[$ . Поскольку  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то согласно ТНП и АКС  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} c$  и  $y_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} t - c$ . Следовательно,  $x_n + y_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} c + (t - c)$  и, значит,  $x_n + y_n \rightarrow \infty = a + b$ .

Случай  $a = -\infty$ ,  $b < \infty$  исследуется аналогично. ►

**Лемма об умножении на бесконечно малую (ЛУБМ).** Произведение ограниченной и бесконечно малой является бесконечно малой: если последовательность  $x_n$  ограничена, а последовательность  $y_n$  стремится к нулю, то  $x_n y_n \rightarrow 0$ .

**Теорема о произведении пределов.** Произведение пределов является пределом произведения: если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  и если произведение  $a \cdot b$  определено, то  $x_n \cdot y_n \rightarrow a \cdot b$ . (Неудачная формулировка: предел произведения равен произведению пределов.)

◀ Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq (|x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$  (согласно каким фактам?). Поэтому согласно лППП  $|x_n y_n - ab| \rightarrow 0$  и, стало быть,  $x_n y_n \rightarrow ab$ .

Предположим, что  $b = \infty$ ,  $a > 0$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $c \in ]0, a[$ . Поскольку  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow \infty$ , то согласно ТНП и АКС  $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} c$  и  $y_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} \frac{t}{c}$ . Следовательно,  $x_n y_n \underset{n \rightarrow \infty}{>} c \frac{t}{c} = t$  и, значит,  $x_n y_n \rightarrow \infty = ab$ .

Оставшиеся три случая исследуются аналогично. ►

**Теорема.** Обратная величина предела является пределом последовательности обратных величин: если  $x_n \rightarrow a \neq 0$ , то  $x_n \neq 0 \mid_{n \rightarrow \infty}$  и  $\frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$ . (Неудачная формулировка: предел последовательности обратных величин равен обратной величине предела.)

◄ Пусть  $c \in ]0, |a|[$ . Так как  $|x_n| \rightarrow |a|$ , то согласно ТНП  $|x_n| \underset{n \rightarrow \infty}{>} c$ . Следовательно, последовательность  $x_n$  определена для всех достаточно больших  $n$ , а последовательность  $\frac{1}{ax_n}$  ограничена.

Если  $|a| < \infty$ , то

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|ax_n|} |a - x_n| \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

как произведение ограниченной на бесконечно малую.

Если  $|a| = \infty$ , то для каждого  $\varepsilon \in ]0, \infty[$  имеем  $|x_n| \underset{n \rightarrow \infty}{>} 1/\varepsilon$  и, следовательно,  $|1/x_n| \underset{n \rightarrow \infty}{<} \varepsilon$ . ►

*Подпоследовательностью* последовательности  $x_n$  будем называть всякую последовательность вида  $(x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N})$ , где  $(n_k \mid k \in \mathbb{N})$  — последовательность номеров, стремящаяся к бесконечности.

**Теорема.** Предел сходящейся последовательности является пределом любой ее подпоследовательности.

◄ Пусть  $x_{n_k}$  — какая-нибудь подпоследовательность последовательности  $x_n$ ,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  и  $U \in \mathcal{N}(a)$ . Поскольку  $x_n \rightarrow a \mid_{n \rightarrow \infty}$ , то имеется такой номер  $m$ , что  $x_n \in U$  при любом  $n \geq m$ . А так как  $n_k \rightarrow \infty \mid_{k \rightarrow \infty}$ , то имеется такой номер  $j$ , что  $n_k \geq m$  при любом  $k \geq j$ . Следовательно,  $x_{n_k} \in U$  для каждого  $k \geq j$  и, стало быть,  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$ . ►

Точку  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  называют *частичным пределом последовательности*  $x_n$ , если  $a$  служит пределом некоторой подпоследовательности  $x_{n_k}$  последовательности  $x_n$ .

**Теорема Вейерштрасса о частичных пределах.** Множество частичных пределов любой последовательности  $x_n$  точек расширенной числовой прямой содержит наибольший и наименьший элементы и, следовательно, в  $\overline{\mathbb{R}}$  всякая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.

◄ Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $X_n := \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  ( $n$ -й хвост

последовательности) и  $v_n := \sup X_n$ . Так как  $X_n \supset X_{n+1}$ , то последовательность  $v_n$  убывает и потому стремится к некоторому  $h \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Если  $h = -\infty$ , то  $-\infty \leq x_n \leq v_n \rightarrow h$ , и по ТНП  $x_n \rightarrow h$ . Следовательно,  $h$  — единственный частичный предел нашей последовательности.

Если  $h > -\infty$ , то найдется последовательность  $u_k < h$ , сходящаяся к  $h$  при  $k \rightarrow \infty$ . Поскольку  $u_k < h \leq v_k = \sup X_k$ , то  $u_k$  не ограничивает множество  $X_k$  слева и потому для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдется точка  $x_{n_k} \in X_k$  такая, что  $u_{n_k} < h$  и  $n_k \geq k$ . Согласно ЛППП  $x_{n_k} \rightarrow h \mid_{k \rightarrow \infty}$ , т. е.  $h$  является частичным пределом последовательности  $x_n$ .

Наконец, пусть  $a$  является пределом какой-то подпоследовательности  $x_{n_k}$ . Поскольку  $x_{n_k} \in X_{n_k}$ , то  $x_{n_k} \leq v_{n_k}$  для каждого  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно,  $a \leq \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} = h$ . ►

Непосредственным следствием доказанного утверждения является следующая классическая

**Теорема Вейерштрасса о подпоследовательностях.** Каждая последовательность вещественных чисел обладает сходящейся в  $\overline{\mathbb{R}}$  подпоследовательностью.

Наибольший (наименьший) элемент множества частичных пределов последовательности  $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$  называют *верхним (нижним) пределом* этой последовательности и обозначают символом  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ) или символом  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  ( $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ ).

**Упражнения.** 1.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \rightarrow \infty} \{c \in \mathbb{R}: (x_n \leq c)_{n \rightarrow \infty}\}$ .

2. Последовательность  $x_n \in \mathbb{R}$  имеет предел в том и только в том случае, когда  $\liminf x_n = \limsup x_n$ . В этом случае  $\lim x_n = \liminf x_n$ .

**Критерий Коши.** Последовательность  $x_n \in \mathbb{R}$  вещественных чисел имеет конечный предел (сходится в  $\mathbb{R}$ ) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему *условию Коши*:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \mid (\forall k, l \in \mathbb{N} (l \geq k \geq m \Rightarrow |x_k - x_l| \leq \varepsilon))$$

(для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $m$ , что для любых натуральных  $k$  и  $l$ , следующих за  $m$ , выполнено неравенство  $|x_k - x_l| \leq \varepsilon$ .)

◄ Предположим, что  $x_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , и пусть  $\varepsilon > 0$ . Согласно АКС  $|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , т. е.  $\exists m \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq m |x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Отсюда  $|x_k - x_l| \leq |x_k - a| + |a - x_l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$  для любых  $k, l \geq m$ .



Допустим теперь, что последовательность  $x_n$  удовлетворяет условию Коши. Согласно теореме Вейерштрасса она обладает подпоследовательностью  $x_{n_k}$ , сходящейся к некоторой точке  $a \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $m$  — такой номер, что  $|x_i - x_j| < \varepsilon$  для любых  $i, j \geq m$ . Поскольку  $n_k \rightarrow \infty$   $|k \rightarrow \infty$ , то имеется такой номер  $z$ , что  $n_k \geq m$  для каждого  $k \geq z$ . Следовательно для каждого  $n \geq m$  и любого  $k \geq z$  имеет место неравенство  $|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon$ . И так как  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$ , то в силу ТНП  $|a - x_n| < \varepsilon$ . Следовательно,  $a \in \mathbb{R}$ , ибо  $x_n, \varepsilon \in \mathbb{R}$ . А так как последнее неравенство справедливо для всякого  $n \geq m$ , то согласно АКС  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$ . ►

Высказывание в условии Коши, обрaмленное большими круглыми скобками, равносильно формуле  $\text{diam } X_m \leq \varepsilon$ , где  $X_m = \{x_m, x_{m+1}, \dots\}$ . Поэтому условие Коши эквивалентно следующему утверждению:

$$\text{diam } X_m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(диаметры хвостов последовательности  $x_n$  стремятся к нулю). Последовательности, удовлетворяющие условию Коши, называются *фундаментальными* или *последовательностями Коши*.

## Приложение

### Вещественные числа по Вейерштрассу.

Исходный материал — арифметика рациональных чисел.

Пусть в этом пункте буквы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  обозначают последовательности Коши рациональных чисел. Будем говорить, что последовательности  $\alpha$  и  $\beta$  сближаются, и писать  $\alpha \sim \beta$ , если для всякого рационального числа  $\varepsilon > 0$   $|\alpha_n - \beta_n| < \varepsilon$   $|n \rightarrow \infty$ .

*Вещественным числом* (по Вейерштрассу) называют всякое множество вида  $[\alpha] := \{\beta : \beta \sim \alpha\}$ .

Множество всех вейерштрассовских чисел обозначим через  $R$  и снабдим его операциями сложения и умножения, а также отношением порядка следующим образом. Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные вейерштрассовские числа. Выберем любые последовательности  $\alpha \in x$  и  $\beta \in y$  и положим  $x + y = [\alpha + \beta]$  и  $x \cdot y := [\alpha \cdot \beta]$ . Кроме того, будем считать, что  $x \leq y$ , если имеются такие последовательности  $\alpha \in x$  и  $\beta \in y$ , что  $\alpha_n \leq \beta_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Упражнения.** 0. Отношение сближения  $\sim$  является отношением эквивалентности, т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно.

1. Операции  $+$  и  $\cdot$  определены корректно, т.е. не зависят от выбора представителей  $\alpha \in x$  и  $\beta \in y$  чисел  $x, y \in R$ .

2. Система вейерштрассовских чисел  $(R, +, \cdot, \leq)$  обладает всеми свойствами системы вещественных чисел, приведенными в § 0.2.

### § 1.2. Суммирование бесконечных числовых рядов

**Введение.** Допустим, что нужно составить таблицу значений какой-нибудь функции, например показательной функции  $f(x) = a^x$ . Это была бы довольно простая арифметическая задача, если бы рассматриваемую функцию удалось представить в полиномиальной форме, т. е. в виде

$$a^x = q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n + \dots = \sum_{n \geq 0} q_nx^n.$$

(Записывая полином в виде бесконечной суммы, предполагают, что лишь конечное число его коэффициентов не равно нулю.)

Исходя из нашей гипотезы, формул  $a^0 = 1$ ,  $a^1 = a$ ,  $a^{2x} = a^x \cdot a^x$  и *правила умножения полиномов*

$$\left( \sum_{i \geq 0} \alpha_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{j \geq 0} \beta_j x^j \right) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n x^n, \quad \gamma_n = \sum_{i+j=n} \alpha_i \beta_j,$$

приходим к следующей системе уравнений для отыскания коэффициентов  $q_n$  нашего гипотетического полинома:

$$q_0 = 1, \quad \sum_{n \geq 0} q_n = a, \quad q_n 2^n = \sum_{i+j=n} q_i q_j.$$

Отсюда, используя формулу разложения бинома, по индукции приходим к более простой системе уравнений:

$$q_0 = 1, \quad q_n = \frac{(q_1)^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(q_1)^n}{n!} = a.$$

Чтобы наша попытка не оказалась бесплодной, необходимо ответить на следующие три вопроса:

1. Что такое сумма бесконечной последовательности чисел?
2. Разрешима ли полученная система уравнений?
3. Если последовательность чисел  $q_0, q_1, \dots$  есть решение полученной системы уравнений, то верна ли формула  $a^x = \sum_{n \geq 0} q_n x^n$ ?

Ответ на первый вопрос будет дан в этом параграфе, а на два другие — в следующих главах. Будут также установлены следующие знаменитые разложения.

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

где  $e := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \dots$ .

$$(2) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(3) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(4) \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \forall x \in [-1, 1].$$

В частности,  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$ .

$$(5) \text{Формула Н.Меркатора. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

(6) Ньютоново разложение бинома:

$$(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \dots \quad \forall x \in ]-1, 1[, \text{ а если } s \geq 0,$$

то  $\forall x \in [-1, 1]$ , если же  $s \in \mathbb{N}$ , то  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

В тех случаях, когда речь идет о суммировании бесконечной последовательности чисел (например, об определении суммы или о ее свойствах), вместо слова "последовательность" обычно употребляют слово "ряд".

Следующие используемые на практике фразы суть математические синонимы: "ряд  $\alpha = (\alpha_n \mid n \in \mathbb{N})$ ", "ряд  $\alpha_n$ ", "последовательность  $\alpha_n$ ", "ряд  $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ ", "ряд  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ ".

Число  $\sigma_k(\alpha) = \sum_{n=0}^k \alpha_n$  называют  $k$ -й *частичной суммой ряда*  $\alpha$ , а число  $\alpha_k$  —  $k$ -м *членом этого ряда*. Если последовательность  $\sigma_k(\alpha)$  частичных сумм ряда  $\alpha$  имеет предел при  $k \rightarrow \infty$ , то этот предел называют *суммой ряда*  $\alpha$  и обозначают одним из следующих символов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n \geq 0} \alpha_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n.$$

Классическое выражение "ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ " не предполагает, что ряд  $\alpha$  обладает суммой.

**Теорема.** Всякий неотрицательный ряд ( $\alpha_n \geq 0$ ) имеет сумму, возможно, бесконечную.

◀ Последовательность частичных сумм такого ряда возрастающая и потому имеет предел. ▶

Ряд, обладающий конечной суммой, называют *суммируемым* или *сходящимся*.

**Необходимое условие суммируемости ряда.** Члены суммируемого ряда стремятся к нулю: если сумма ряда  $\alpha$  конечна, то  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

◀ Пусть  $s = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k := \lim \sigma_n(\alpha)$ . Тогда  $\alpha_n = \sigma_n(\alpha) - \sigma_{n-1}(\alpha) \rightarrow s - s = 0$ . ▶

**Примеры и упражнения.** 1. Ряд  $(z^n \mid n \in \mathbb{N})$  называют *geo-*

*метрической прогрессией.* Он суммируем в том и только в том случае, когда  $|z| < 1$ . В этом случае  $\sum_{n \geq 0} z^n = (1 - z)^{-1}$ .

◀ Если ряд  $z^n$  суммируем, то  $z^n \rightarrow 0$  и, следовательно,  $|z| < 1$ . Если же  $|z| < 1$ , то

$$\sum_{n=0}^k z^n = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z}. \blacktriangleright$$

2. Сумма *гармонического ряда*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  бесконечна, несмотря на то что  $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \mid_{n \rightarrow \infty}$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \geq \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Способ оценки частичных сумм ряда в этом и следующем примере называют *телескопическим методом*.

3.  $1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots < \infty$ , если  $s > 1$ .

◀ Пусть  $\sigma_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$  и  $n_j := 2^{j+1} - 1$ . Достаточно установить, что последовательность  $\sigma_{n_j}$  ограничена. (Почему?)

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \sigma_{n_j} &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{7^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{ns}} + \dots + \frac{1}{n_j^s}\right) \leq \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{4^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{ns}} + \dots + \frac{1}{2^{ns}}\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{2}{2^s}\right) + \left(\frac{4}{4^s}\right) + \dots + \left(\frac{2^n}{2^{ns}}\right) = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-s})^k = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} < \infty. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Информация.** Функцию  $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$  переменной  $s$  называют *дзета-функцией* Римана и обозначают  $\zeta(s)$ .

4. Если вещественное число  $x$  не принадлежит промежутку, указанному в одной из знаменитых формул, то соответствующий ряд при этом  $x$  несуммируем.

5. Если ряд  $\alpha$  имеет сумму, то  $|\sum \alpha_n| \leq \sum |\alpha_n|$ .

6. Если ряды  $\alpha$  и  $\beta$  суммируемы, то  $\sum(\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda\sum\alpha_n + \mu\sum\beta_n$  при любых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**Критерий Коши суммируемости ряда.** Ряд  $\alpha$  суммируем в том и только в том случае, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} \mid \forall k, l \in \mathbb{N} (l \geq k \geq m \Rightarrow \left| \sum_{n=k}^l \alpha_n \right| \leq \varepsilon).$$

◀ Условие Коши суммируемости ряда  $\alpha$  равносильно условию Коши сходимости последовательности его частичных сумм. ▶

**Принцип сравнения.** Если для ряда  $\alpha$  отыщется такой суммируемый ряд  $\beta$ , что  $(|\alpha_n| \leq \beta_n)_{n \rightarrow \infty}$ , то ряд  $\alpha$  суммируем. Иными словами: ряд, асимптотически ограниченный суммируемым рядом, суммируем.

◀ Условие Коши суммируемости ряда  $\beta$  влечет выполнение условия Коши суммируемости Коши ряда  $\alpha$ . ▶

Если  $\sum |\alpha_n| < \infty$ , то ряд  $\alpha$  называют *абсолютно суммируемым (сходящимся)*. Согласно принципу сравнения всякий абсолютно суммируемый ряд суммируем.

**Признак Коши.** Ряд  $\alpha$  абсолютно суммируем, если найдется такое число  $\theta < 1$ , что  $\sqrt[n]{|\alpha_n|} \leq \theta$ . Если же  $\sqrt[n]{|\alpha_n|} \geq 1$ , то ряд  $\alpha$  несуммируем.

◀ В первом случае ряд  $\alpha_n$  мажорируется суммируемой геометрической прогрессией вида  $C\theta^n$ , а во втором члены этого ряда не стремятся к нулю. ▶

**Признак Д'Аламбера.** Ряд  $\alpha$  абсолютно суммируем, если найдется такое число  $\theta < 1$ , что  $\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \leq \theta$ . Если же  $\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \geq 1$ , то ряд  $\alpha$  несуммируем.

◀ Первое асимптотическое неравенство равносильно существованию такого номера  $m$ , что  $\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \leq \theta$  при любом  $n \geq m$ . Поэтому для каждого такого  $n$  имеем  $|\alpha_{n+1}| \leq \theta|\alpha_n| \leq \dots \theta^{n-m}|\alpha_m| = c\theta^n$ . Остается прибегнуть к услугам принципа сравнения.

Во втором случае члены рассматриваемого ряда не стремятся к нулю. ▶

**Упражнения.** 1. Признак Д'Аламбера слабее признака Коши. Что это означает?

2. Первое условие признака Коши эквивалентно равенству  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1$ , а первое условие признака Д'Аламбера — равенству

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} < 1.$$

3. Ряд  $\alpha_n := \frac{1}{n(\ln n)^s}$  суммируем в том и лишь в том случае, когда  $s > 1$ . (Подсказ: использовать телескопический метод и принцип сравнения.)

4. Ряд биномиальных коэффициентов  $C_s^n := \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}$

a) абсолютно суммируем, если  $s \geq 0$ ,

b) несуммируем, если  $s < -1$  и

c) суммируем, но не абсолютно, если  $s \in ]-1, 0[$ .

5. Если  $\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n-1}|} \leq \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}$  и  $\sum_n |\beta_n| < \infty$ , то ряд  $\alpha$  абсолютно суммируем.

**Информация. (Признак Бертрانا.)** Ряд  $\alpha$  абсолютно суммируем, если найдется такое  $\theta < 1$ , что  $\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n-1}|} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{\theta}{n \ln n}$ .

Если же  $\frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n-1}|} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}$ , то  $\sum |\alpha_n| = \infty$ .

**Признак Лейбница.** Если убывающая последовательность  $u_n$  стремится к нулю, то ряд  $u_0 - u_1 + u_2 - \dots$  суммируем, причём

$$\sum_{k \geq n} (-1)^k u_k \in [u_n, u_{n+1}].$$

◀ Пусть  $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . Тогда  $[0, s_0] \supset [s_0, s_1] \supset [s_1, s_2, ] \supset \dots$

Следовательно, множество  $S_n := \{s_n, s_{n+1}, \dots\} \supset [s_{n-1}, s_n]$  и потому  $\text{diam } S_n \leq |s_n - s_{n-1}| = |u_n| \rightarrow 0$ , т.е. последовательность  $s_n$  удовлетворяет условию Коши и потому сходится к некоторому  $s \in \mathbb{R}$ , называемому суммой. Нетрудно заметить, что  $s$  лежит на каждом из рассмотренных отрезков. В частности,  $s \in [s_0, s_1] = [u_0, u_0 - u_1] \subset [u_0, 0]$ . ▶

Доказанное утверждение является простым следствием двух следующих теорем.

**Неравенство Абеля.** Если  $u_k \geq \dots \geq u_l \geq 0$ , то для любых чисел  $v_k, \dots, v_l$  справедлива формула

$$\left| \sum_{n=k}^l u_n v_n \right| \leq u_k h, \text{ где } h := \sup \left\{ \left| \sum_{n=k}^j v_n \right| : j \in \{k, \dots, l\} \right\}.$$

◀ Для каждого  $j \in \{k, \dots, l\}$  положим  $s_j = \sum_{n=k}^j v_n$ . Кроме того,

будем считать, что  $s_{k-1} = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |u_k v_k + \dots + u_l v_l| &= |u_k(s_k - s_{k-1}) + \dots + u_l(s_l - s_{l-1})| = \\ &= |(u_k - u_{k+1})s_k + \dots + (u_{l-1} - u_l)s_{l-1} + u_l s_l| \leq \\ &\leq (|u_k - u_{k+1}| + \dots + |u_{l-1} - u_l| + |u_l|)h = \\ &= (u_k - u_{k+1} + \dots + u_{l-1} - u_l + u_l)h = u_k h. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Признак Абеля — Дирихле.** Если  $u_n$  — убывающая числовая последовательность, стремящаяся к нулю, и если частичные суммы ряда  $v_n$  образуют ограниченную последовательность, то ряд  $u_n v_n$  суммируем.

◀ Проверим выполнение условия суммируемости Коши для ряда  $u_n v_n$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  положим  $s_j = \sum_{n \geq 0}^j v_n$  и пусть  $h$  — такое положительное число, что  $|s_n| < h$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ . Так как последовательность  $u_n$  стремится к нулю, то найдется такой номер  $m$ , что  $0 \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{2h}$  для всякого  $n \geq m$ .

Пусть  $l \geq k > m$ . Поскольку  $|\sum_{n=k}^j v_n| = |s_j - s_{k-1}| \leq 2h$  для каждого  $j \geq k$ , то согласно неравенству Абеля  $|\sum_{n=k}^l u_n v_n| \leq u_k 2h \leq \varepsilon$ . ▶

**Следствие.** В условиях признака Абеля — Дирихле справедливо следующее обобщение неравенства Абеля:

$$|\sum_{n \geq k} u_n v_n| \leq u_k \sup\{|\sum_{n=k}^j v_n| : j \geq k\}.$$

**Типичные примеры.** Ряды  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ,  $c_n(t) = \frac{\cos nt}{n}$  и  $s_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ , ( $t \in ]0, \pi[$ ), суммируемы, но не абсолютно суммируемы.

◀ 1) Ряд  $\alpha$  суммируем по признаку Абеля — Дирихле в то время, как  $\sum |\alpha_n| = \infty$ .

2) Покажем, что частичные суммы рядов  $\cos nt$  и  $\sin nt$  ограничены. Но прежде — краткий экскурс в тригонометрию. Для каждого  $t \in \mathbb{R}$  положим  $z(t) = \cos t + i \sin t \in \mathbb{C}$ . Используя основные свойства синуса и косинуса, нетрудно заметить, что  $z(0) = 1$ ,  $z(-t) = \bar{z}(t)$  и  $z(t+u) = z(t)z(u)$  (**формула Муавра**). В свой черед все основные факты тригонометрии являются простыми следствиями этих трсх равенств с учетом того, что  $\cos t = \operatorname{Re} z(t) =$  (вещественная часть числа

$z(t)$ , а  $\sin t = \operatorname{Im} z(t) = (\text{мнимая часть числа } z(t))$ . Нужные нам следствия:  $(z(t))^n = z(nt)$ ,  $1 = z(t)z(-t) = z(t)\bar{z}(t) = |z(t)|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$ ,  $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ .

Пусть теперь  $z := z(t)$ ,  $t \in ]0, 2\pi[$ . В этом случае  $z \neq 1$  и потому согласно формуле Муавра

$$\left| \sum_{n=1}^k z(nt) \right| = \left| \sum_{n=1}^k z^n \right| = \left| \frac{z(1-z^k)}{1-z} \right| \leq \frac{2}{|1-z|}.$$

Следовательно,  $\left| \sum_{n=1}^k \cos nt \right| = \left| \operatorname{Re} \sum_{n=1}^k z(nt) \right| \leq \frac{2}{|1-z|}$  и  $\left| \sum_{n=1}^k \sin nt \right| = \left| \operatorname{Im} \sum_{n=1}^k z(nt) \right| \leq \frac{2}{|1-z|}$  при любом целом  $k > 0$ . Поэтому согласно признаку Абеля — Дирихле ряды  $\frac{\cos nt}{n}$  и  $\frac{\sin nt}{n}$  суммируемы при любом  $t \in ]0, 2\pi[$ .

3) Пусть  $t \in ]0, \pi[$ . Чтобы убедиться в том, что ряды  $c_n(t)$  и  $s_n(t)$  не абсолютно суммируемы, достаточно показать, что

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 nt}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2 nt}{n} = \infty,$$

ибо  $|\cos| \geq \cos^2$ ,  $|\sin| \geq \sin^2$ . Для этого заметим, что

$$\sum_n \frac{\cos^2 nt}{n} + \sum_n \frac{\sin^2 nt}{n} = \sum_n \frac{1}{n} = \infty.$$

Следовательно, одна из рассматриваемых сумм также равно  $\infty$ . Но так как  $\cos^2 nt - \sin^2 nt = \cos 2nt$ , а сумма ряда  $\frac{\cos 2nt}{n}$  согласно п. 2) конечна, то сумма каждого из рассматриваемых рядов бесконечна. ►

(Согласно формуле Н. Меркатора  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}/n = \ln 2$ . В разделе, посвященном рядам Фурье, будет установлено, что  $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi-t}{2}$  при  $t \in ]0, 2\pi[$ .)

**Упражнение.** Если  $x \in [0, 1]$ , то справедливы следующие оценки:

$$\left| \cos x - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!},$$

$$\left| \sin x - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2k+3}}{(2k+3)!},$$



$$\left| \arctan x - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2k+3}}{2k+3},$$

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{n=1}^k \frac{x^n}{n} (-1)^{n-1} \right| \leq \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

**Теорема Мертенса об умножении рядов.** Если ряд  $\alpha = (\alpha_i \mid i \in \mathbb{N})$  абсолютно суммируем, а ряд  $\beta = (\beta_j \mid j \in \mathbb{N})$  суммируем, то ряд  $\gamma = (\gamma_k := \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j \mid k \in \mathbb{N})$  суммируем и

$$\sum_{k \geq 0} \gamma_k = \left( \sum_{i \geq 0} \alpha_i \right) \left( \sum_{j \geq 0} \beta_j \right).$$

Ряд  $\gamma$  в этой теореме сформирован под диктовку правила умножения полиномов. Его обычно называют *произведением (по Коши) рядов  $\alpha$  и  $\beta$* .

◀ Достаточно установить, что последовательность

$$z_n := \left| \left( \sum_{i \leq n} \alpha_i \right) \left( \sum_{j \geq 0} \beta_j \right) - \sum_{k \leq n} \gamma_k \right|$$

стремится к нулю.

Для каждого номера  $n$  положим

$$A_n = \sum_{i > n} |\alpha_i|, \quad B_n = \left| \sum_{j > n} \beta_j \right|,$$

$$C_n = \sup\{B_n, B_{n+1}, \dots\}, \quad [n/2] := \max\{k \in \mathbb{N} : k \leq n/2\}$$

и заметим, что последовательности  $a_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  стремятся к нулю, а последовательность номеров  $[n/2]$  — к бесконечности.

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq n} \gamma_k &= \sum_{i+j \leq n} \alpha_i \beta_j = \\ &= \sum_{i \leq n} \sum_{j \leq n-i} \alpha_i \beta_j = \sum_{i \leq n} \alpha_i \sum_{j \leq n-i} \beta_j, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} z_n &= \left| \sum_{i \leq n} \alpha_i \sum_{j \geq 0} \beta_j - \sum_{i \leq n} \alpha_i \sum_{j \leq n-i} \beta_j \right| = \\ &= \left| \sum_{i \leq n} \alpha_i \left( \sum_{j \geq 0} \beta_j - \sum_{j \leq n-i} \beta_j \right) \right| = \left| \sum_{i \leq n} \alpha_i \sum_{j > n-i} \beta_j \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i \leq n} |\alpha_i| \cdot \left| \sum_{j > n-i} \beta_j \right| = \sum_{i \leq n} |\alpha_i| B_{n-i} = \sum_{i \leq [n/2]} |\alpha_i| B_{n-i} + \\
&+ \sum_{i=[n/2]+1}^n |\alpha_i| B_{n-i} \leq \sum_{i \leq [n/2]} |\alpha_i| C_{[n/2]} + \sum_{i > [n/2]}^n |\alpha_i| C_0 \leq \\
&\leq (A_0 C_{[n/2]} + A_{[n/2]} C_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

согласно теореме о пределе подпоследовательности. ►

**"Контрпример"**. Пусть  $\alpha_n = \beta_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \forall n \in \mathbb{N}$ . Ряды  $\alpha$  и  $\beta$  суммируемы, однако ряд  $\gamma$ , являющийся их произведением по Коши, несуммируем, ибо его члены не стремятся к нулю.

### Приложения

**1. Экспонента. Экспоненциальный ряд**  $\left(\frac{z^n}{n!} \mid n \in \mathbb{N}\right)$  абсолютно суммируем при любом  $z \in \mathbb{R}$ . Функцию, сопоставляющую каждому  $z \in \mathbb{R}$  число  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ , называют *экспонентой* и обозначают  $\exp z$ . Число  $\exp 1$  обозначают буквой  $e$ . В §3.3 будет дано строгое определение показательной функции  $a^x$  и установлено, что  $\exp x = e^x$ .

1) **Экспоненциальное свойство:**  $\exp(x+y) = (\exp x) \cdot (\exp y)$  для любых  $x, y$ .

◀ Следствие теоремы об умножении абсолютно суммируемых рядов и разложения бинома (§0.1). ►

2) Функция  $\exp x$  вещественной переменной  $x$  положительная и строго возрастающая.

◀ Если  $x > 0$ , то  $\exp x > 1$ . И так как  $1 = \exp 0 = \exp(x-x) = (\exp x)(\exp(-x))$ , то  $\exp x > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ .

Если  $x < y$ , то  $\exp(y-x) > 1$ , и потому  $\exp x < (\exp x) \exp(y-x) = \exp y$ . ►

### 2. Оценка остатка экспоненциального ряда:

$$\left| \exp z - \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}, \text{ если } \frac{|z|}{k+2} < 1.$$

### 3. Число $e$ иррационально.

◀ Допустим, что  $e = p/q$ , где  $p, q \in \mathbb{N}$ . Тогда при любом  $n \in \mathbb{N}$  число  $r_n = n!q(e - \sum_{j \leq n} 1/j!)$  целое и положительное. Следовательно,  $r_n \geq 1$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

С другой стороны,  $r_n \leq n!q \frac{2}{(k+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Абсурд! ►

В 1873 г. Шарль Эрмит установил, что  $e$  трансцендентно, т. е. не служит корнем никакого полинома с целыми коэффициентами.

**Упражнения.** 0.  $e = 2,718281828459045\dots$ . Каково наименьшее  $k$ , для которого  $k$ -я частичная сумма экспоненциального ряда даст десять знаков после запятой десятичного разложения числа  $e$ ?

1. **Число Лиувилля**  $\lambda = \sum_{j \geq 0} 10^{-j!} = 0,1100010\dots$  **трансцендентно**. Это первое в истории трансцендентное число.

**Подсказ.** Пусть  $A(x)$  — такой целочисленный полином степени  $s$ , что  $A(\lambda) = 0$ ,  $x_n := \sum_{j \leq n} 10^{-j!}$  и  $B(x)$  — такой полином, что  $A(x) = (x - \lambda)B(x)$  (**теорема Безу**). Тогда  $|x_n - \lambda| \leq 2 \cdot 10^{-(n+1)}$  и

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 10^{n!s} |A(x_n)| = |x_n - \lambda| |B(x_n)| \rightarrow 0. \text{ Абсурд!}$$

2. Будем считать, что последовательность комплексных чисел  $z_n$  сходится к числу  $z \in \mathbb{C}$  если  $|z_n - z| \rightarrow 0$ .

а) **координатный критерий сходимости:**

$$x_n + iy_n \rightarrow a + ib \Leftrightarrow x_n \rightarrow a \text{ и } y_n \rightarrow b.$$

б) При таком понимании сходимости в поле комплексных чисел все утверждения этой главы, сохраняющие смысл для последовательностей и рядов комплексных чисел, а также их доказательства сохраняют силу.

В частности, экспоненциальный ряд  $\left( \frac{z^n}{n!} \mid n \in \mathbb{N} \right)$  абсолютно суммируем при любом  $z \in \mathbb{C}$ . Функцию, сопоставляющую каждому  $z \in \mathbb{C}$  сумму этого ряда, называют *экспонентой* и обозначают либо  $\exp z$ , либо  $e^z$ . Эта функция обладает экспоненциальным свойством и для нее справедливо равенство

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{формула Эйлера}).$$

## Глава 2. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Здесь, а также в главах 3 — 6 буквы  $S, T, \dots, Z$  обозначают множества из  $\overline{\mathbb{R}}$ , а слово "функция" употребляется как синоним выражения "отображение вида  $f: X \rightarrow Y$ ", если не сделано специальных оговорок.

### § 2.1. Свойства операции $\lim$ .

Будем говорить, что  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  является *точкой прикосновения* множества  $S$  и писать  $p \in \overline{S}$ , если в любой окрестности  $V$  точки  $p$  имеются представители множества  $S$ , т. е. если

$$\forall V \in \mathcal{N}(p) \quad V \cap S \neq \emptyset.$$

Совокупность  $\overline{S}$  всех точек прикосновения множества  $S$  называют *замыканием этого множества*.

**Упражнения.** 0. Каждая точка множества  $S$  является точкой его прикосновения, т. е.  $S \subset \overline{S}$ .

1.  $\infty \in \overline{\mathbb{N}}$ .  $\overline{]a < b[} = [a, b]$ .  $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R}}$ .  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ .
2.  $S \subset T \Rightarrow \overline{S} \subset \overline{T}$ .
3. Следующие три утверждения эквивалентны:
  - 1)  $p \in \overline{S}$ ;
  - 2) существует последовательность точек  $s_n$  множества  $S$ , сходящаяся к точке  $p$ ;
  - 3)  $\forall V \in \mathcal{N}(p) \ p \in \overline{S \cap V}$ .

Далее всюду в этой главе предполагается, что  $p$  — точка прикосновения множества  $S$ . Типичные случаи:  $S = \mathbb{N}$ ,  $p = \infty$ ;  $S$  — непустой промежуток,  $p \in \overline{S}$ .

**Топологическое определение предела.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  стремится к  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  при  $x$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S$ , и писать  $f(x) \rightarrow a \mid_{x \rightarrow p \mid S}$  или  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p \mid S} a$ , если

$$\forall U \in \mathcal{N}(a) \ \exists V \in \mathcal{N}(p) \mid \forall x \in S \cap V \ f(x) \in U.$$

Точку  $a$  в этом случае называют *пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $p$  по  $S$* , и обозначают символом  $\lim_{x \rightarrow p \mid S} f(x)$ .

**Упражнение.** Прежнее понятие предела последовательности (§ 1.1.) эквивалентно нынешнему, т. е.

$$x_n \rightarrow a \mid_{n \rightarrow \infty} \Leftrightarrow x_n \rightarrow a \mid_{n \rightarrow \infty \mid \mathbb{N}}.$$

**Теорема о единственности предела.** Если  $f(x) \rightarrow a \mid_{x \rightarrow p \mid S}$  и  $f(x) \rightarrow b \mid_{x \rightarrow p \mid S}$ , то  $a = b$ .

◀ Пусть  $U$  и  $V$  — произвольные окрестности точек  $a$  и  $b$  соответственно. Согласно определению предела, существуют такие окрестности  $W_1$  и  $W_2$  точки  $p$ , что: 1)  $f(x) \in U$  для любого  $x \in S \cap W_1$  и 2)  $f(x) \in V$  для любого  $x \in S \cap W_2$ .

Поскольку  $p$  есть точка замыкания множества  $S$ , то в ее окрестности  $W := W_1 \cap W_2$  имеются представители множества  $S$ . Пусть  $x$  — одна из них. Для этой точки согласно пунктам 1) и 2) имеем  $f(x) \in U \cap V$ . Следовательно, любые окрестности точек  $a$  и  $b$  пересекаются и, стало быть,  $a = b$ . ▶

Говорят, что функция  $f$  убывает (строго убывает) на множестве  $S$ , если для любых  $x, y \in S$ , для которых  $x < y$ , выполнено неравенство

$f(x) \geq f(y)$  ( $f(x) > f(y)$ ).

**Упражнение.** Дать определения функции, возрастающей (строго возрастающей) на множестве  $S$ .

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

**Теорема о пределе монотонной функции.** Если функция  $f$  монотонна на множестве  $S$ , расположенном строго по одну сторону от точки  $p \notin S$ , то она имеет предел при  $x \rightarrow p|S$ . А именно:

- 1) если  $f$  возрастает на  $S$  и  $S < p$ , то  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} \sup f(S)$ ;
- 2) если  $f$  убывает на  $S$  и  $S < p$ , то  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} \inf f(S)$ ;
- 3) если  $f$  убывает на  $S$  и  $p < S$ , то  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} \sup f(S)$ ;
- 4) если  $f$  возрастает на  $S$  и  $p < S$ , то  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} \inf f(S)$ .

◀ Пусть выполнены предпосылки пункта 1) и пусть  $h = \sup f(S)$ . Если  $h = -\infty$ , то  $f(x) = h$  для каждого  $x \in S$  и потому  $f(x) \rightarrow h$ .

Пусть  $h > -\infty$  и  $U$  — произвольная окрестность точки  $h$ . В этом случае  $U$  содержит некоторый промежуток вида  $]r < h]$ . Поскольку  $r < h = \sup f(S)$ , то найдется такая точка  $s \in S$ , что  $r < f(s)$ . Пусть  $V = ]s, \infty]$ . Так как  $s < p$ , то  $V$  является окрестностью точки  $p$ .

Функция  $f(x)$  возрастает на  $S$ . Поэтому для каждого  $x \in S \cap V$  имеем  $r < f(s) \leq f(x) \leq h$  и, следовательно,  $f(x) \in [r, h] \subset U$ , ч.т.д.

Утверждения 2) - 4) устанавливаются аналогичным путем. ▶

Пусть для каждой точки  $x$  некоторого множества  $M$  задано какое-то высказывание  $\Phi(x)$ . Множество  $M$  в этом случае мы будем называть областью задания высказывания  $\Phi$  и обозначать символом  $\text{Dom } \Phi$ . Множество  $M$  является объединением непересекающихся множеств  $M_t := \{x \in M : \Phi(x) \text{ истинно}\}$  и  $M_f := \{x \in M : \Phi(x) \text{ ложно}\}$ . Высказывание " $\Phi(x)$  справедливо для каждого  $x \in Z$ " предполагает, что  $Z \subset M_t$ .

Будем говорить, что высказывание  $\Phi(x)$  верно при  $x$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S$ , и писать  $(\Phi(x))_{x \rightarrow p|S}$  или  $\Phi(x) |_{x \rightarrow p|S}$ , если у точки  $p$  имеется такая окрестность  $V$ , что  $\Phi(x)$  истинно при любом  $x \in S \cap V$ . Множество  $S$  в подобной ситуации будем называть направляющим к точке  $p$ . Приписку  $x \rightarrow p|S$  зачастую бывает удобно помещать под одним из знаков, входящих в высказывание  $\Phi(x)$ .

**Примеры.** 0. Если высказывание  $\Phi(x)$  справедливо для каждой точки  $x$  направляющего множества  $S$ , то  $\Phi(x) |_{x \rightarrow p|S}$ .

1. Если высказывание  $\Phi(x)$  определено для любого натурального числа  $n$  и если  $\Phi(n) |_{n \rightarrow \infty}$  в прежнем смысле (§ 1.1.), то  $\Phi(n) |_{n \rightarrow \infty | \mathbb{N}}$ .

$$2. |x| \underset{x \rightarrow 0|\mathbb{R}}{\leq} 10^{-9} \cdot e^x > x^{100} \underset{x \rightarrow \infty|\mathbb{R}}{|}$$

### 3. Краткая форма определения предела:

$$f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{N}(a) \ f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\in} U.$$

Во фразах вида  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a$ ,  $\lim_{x \rightarrow p|S} \Phi(x)$  и  $\Phi(x) \underset{x \rightarrow p|S}{|}$ , приписку  $x \rightarrow p|S$

обычно заменяют следующими приписками:

$x \rightarrow p$ , если молчаливо предполагается, что  $S = (\text{Dom } f) \setminus \{p\}$

или  $S = (\text{Dom } \Phi) \setminus \{p\}$ ;

$x \nearrow p$ , если  $-S = ]-\infty, p[ \cap \text{Dom } f$  или  $S = ]-\infty, p[ \cap \text{Dom } \Phi$ ;

$x \searrow p$ , если  $-S = ]p, \infty[ \cap \text{Dom } f$  или  $S = ]p, \infty[ \cap \text{Dom } \Phi$ .

Например,  $e^x \underset{x \rightarrow -\infty}{=} 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} = \infty$ ,  $\lim_{x \nearrow 0} \text{sign } x = -1$ ,  $x^2 \underset{x \searrow 0}{<} x$ .

Если  $S = \mathbb{N}$ , то в качестве переменной чаще всего используют буквы  $n, k, i, j$ , а не буквы  $x, y, \dots$ , а вместо приписки  $n \rightarrow \infty|\mathbb{N}$  пишут просто  $n \rightarrow \infty$ .

*В утверждениях этой и последующих глав, содержащих приписку вида  $\rightarrow p|S$  или её заменитель, молчаливо предполагается, что точка  $p$  является точкой прикосновения направляющего множества  $S$ .*

**Теорема о неравенстве пределов (ТНП).** Пусть функции  $f$  и  $g$  таковы, что  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a$ ,  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} b$ . Тогда

1) если  $a < b$ , то  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{<} g(x)$ ;

2) если  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\leq} g(x)$ , то  $a \leq b$ .

◀ 1) Пусть  $a < b$  и  $c$  — какое-либо число из интервала  $]a < b[$ . Полуинтервалы  $U := ]-\infty, c[$  и  $V := ]c, \infty[$  являются окрестностями точек  $a$  и  $b$  соответственно. Так как  $f(x) \rightarrow a$ , а  $g(x) \rightarrow b$ , то имеются такие окрестности  $W_1$  и  $W_2$  точки  $p$ , что

a)  $f(x) \in U$  при любом  $x \in S \cap W_1$ , а

b)  $g(x) \in V$  при любом  $x \in S \cap W_2$ .

Поэтому для каждой точки  $x \in S \cap W_1 \cap W_2$  имеют место соотношения a) и b), равносильные неравенствам  $f(x) < c < g(x)$ . Таким образом, для каждой точки  $x$  из окрестности  $W_1 \cap W_2$  точки  $p$  выполняется неравенство  $f(x) < g(x)$ .

2) Условие  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\leq} g(x)$  предполагает наличие такой окрестности  $W_1$  точки  $p$ , что  $f(x) \leq g(x)$  для всех  $x \in S \cap W_1$ . Допустим, что  $b < a$ . Согласно пункту 1),  $g(x) < f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{|}$ , т. е. существует такая окрестность  $W_2$ , что  $g(x) < f(x)$  для каждого  $x \in S \cap W_2$ . Поскольку  $p$  есть точка прикосновения множества  $S$ , то в окрестности  $W := W_1 \cap W_2$

этой точки имеется точка  $q \in S$ . Для нас в рассматриваемой ситуации выполняются неравенства  $f(q) \leq g(q)$  и  $g(q) < f(q)$ . Абсурд! Значит,  $a \leq b$ . ►

**Лемма о пределе промежуточной функции (ЛППФ).** Если функции  $f$ ,  $u$  и  $v$  таковы, что

$$f(x) \in [u(x), v(x)], \quad \lim_{x \rightarrow p|S} u(x) = a = \lim_{x \rightarrow p|S} v(x),$$

то  $a = \lim_{x \rightarrow p|S} f(x)$ .

◀ Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $a$  и пусть  $V$  — некоторая выпуклая ее окрестность, лежащая в  $U$  (например, элементарная ее окрестность).

Расшифровав условия теоремы, видим, что имеются такие окрестности  $W_1, W_2, W_3$  точки  $p$ , что справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(x) \in [u(x), v(x)]$ , для каждого  $x \in S \cap W_1$ ;
- 2)  $u(x) \in V$  для каждого  $x \in S \cap W_2$ ;
- 3)  $v(x) \in V$  для каждого  $x \in S \cap W_3$ .

Пусть  $W := W_1 \cap W_2 \cap W_3$ . Согласно пунктам 1) — 3) для каждого  $x \in S \cap W$  выполнены все три соотношения этих пунктов. Поэтому ввиду выпуклости множества  $V$  для каждого  $x \in S \cap W$  имеем  $f(x) \in [u(x), v(x)] \subset V \subset U$ . Это означает, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} U$ , поскольку множество  $W$  является окрестностью точки  $p$ . ►

Классический пример :  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .

◀ Пусть  $O$  — центр единичной окружности,  $A, B$  — такие ее точки, что длина дуги  $AB$  равна  $x < \pi/2$ ,  $C$  — такая точка на луче  $oA$ , что отрезки  $[O, a]$  и  $[B, C]$  ортогональны. Площади треугольника  $OBA$ , кругового сектора  $OBA$  и треугольника  $OBC$  равны, соответственно,  $\frac{\sin x}{2}$ ,  $\frac{x}{2}$ , и  $\frac{\tan x}{2}$ . Отсюда Для всякого  $x \in [0, \pi/2[$  имеем  $\sin x < x < \tan x$ . А так как  $1 \geq \cos x = 1 - 2 \sin^2(\frac{x}{2}) > 1 - \frac{x^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , то по лемме о пределе промежуточной функции  $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Отсюда из полученных неравенств имеем  $1 \geq \frac{\sin x}{x} > \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ . Остается прибегнуть к услугам той же леммы ЛППФ. ►

**Арифметический критерий сходимости (АКС).** Для произвольной функции  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in S \cap ]p-\delta, p+\delta[ \implies |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - a| \xrightarrow{x \rightarrow p|S} 0$ ;

- 2)  $f(x) \rightarrow \infty |_{x \rightarrow p|S} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad t \leq_{x \rightarrow p|S} f(x);$   
 3)  $f(x) \rightarrow -\infty |_{x \rightarrow p|S} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq_{x \rightarrow p|S} t.$

◀

**Упражнение.** Без ущерба для истины знак  $\leq$  в АКС можно заменить знаком  $<$ . 1) Допустим, что  $f(x) \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , и пусть  $\varepsilon > 0$ . Поскольку в этом случае отрезок  $U_\varepsilon := [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  является окрестностью точки  $a$ , то согласно определению предела  $f(x) \in_{x \rightarrow p|S} U_\varepsilon$ . Последнее равносильно утверждению  $|f(x) - a| \leq_{x \rightarrow p|S} \varepsilon$ .

Допустим теперь, что для каждого  $\varepsilon > 0$  выполняется асимптотическое неравенство  $|f(x) - a| \leq_{x \rightarrow p|S} \varepsilon$ , и пусть  $U \in \mathcal{N}(a)$ . Так как  $a \in \mathbb{R}$ , то существует столь малое  $\varepsilon > 0$ , что  $U_\varepsilon := [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset U$ . Из нашего допущения следует, что  $f(x) \in_{x \rightarrow p|S} U_\varepsilon \subset U$ , ч.т.д.

2) Допустим, что  $f(x) \rightarrow \infty$  и пусть  $t \in \mathbb{R}$ . Поскольку отрезок  $V_t := [t, \infty]$  является окрестностью точки  $\infty$ , то  $f(x) \in_{x \rightarrow p|S} V_t$ . Последнее равносильно утверждению  $f(x) \geq_{x \rightarrow p|S} t$ .

Допустим теперь, что для каждого  $t \in \mathbb{R}$  выполняется асимптотическое неравенство  $f(x) \geq_{x \rightarrow p|S} t$ . Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $\infty$  и пусть  $t \in \mathbb{R}$  — столь большое число, что отрезок  $V_t := [t, \infty] \subset U$ . Из нашего допущения следует, что  $f(x) \in_{x \rightarrow p|S} V_t \subset U$ , ч.т.д.

Утверждение 3) доказывается аналогично. ▶

**Следствия.** 1. Если  $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow p|S} a$ , то  $|f(x)| \rightarrow_{x \rightarrow p|S} |a|$ .

2. Если функция  $f(x)$  имеет конечный предел при  $x \rightarrow p|S$ , то она асимптотически ограничена при  $x \rightarrow p|S$ , т. е.

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq_{x \rightarrow p|S} c.$$

(Например, функция  $\tan u$  асимптотически ограничена при  $u \rightarrow 0$ .)

**Теорема о сумме пределов.** Сумма пределов является пределом суммы: если  $f(x) \rightarrow_{x \rightarrow p|S} a$ ,  $g(x) \rightarrow_{x \rightarrow p|S} b$  и сумма  $a + b$  определена, то  $f(x) + g(x) \rightarrow_{x \rightarrow p|S} a + b$ .

◀ Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $\varepsilon > 0$ . Согласно АКС  $|f(x) - a| \leq_{x \rightarrow p|S} \varepsilon/2$  и



$|g(x) - b| \underset{x \rightarrow p|S}{<} \varepsilon/2$ . Следовательно,

$$|f(x) + g(x) - (a + b)| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b| \underset{x \rightarrow p|S}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно АКС  $f(x) + g(x) \rightarrow a + b$ .

Предположим, что  $b = \infty$ ,  $a > -\infty$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $c \in ]-\infty, a[$ . Поскольку  $f(x) \rightarrow a$ , а  $g(x) \rightarrow \infty$ , то согласно ТНП и АКС  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} c$ , а  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} t - c$ . Следовательно,  $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} c + t - c$  и, значит,  $f(x) + g(x) \rightarrow \infty = a + b$ .

Случай  $a = -\infty$ ,  $b < \infty$  исследуется аналогично. ►

**Лемма об умножении на бесконечно малую.** Произведение асимптотически ограниченной и бесконечно малой является бесконечно малой: если при  $x \rightarrow p|S$  функция  $f(x)$  асимптотически ограничена, а функция  $g(x)$  стремится к нулю, то  $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} 0$ .

**Теорема о произведении пределов.** Произведение пределов является пределом произведения: если  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a$ ,  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} b$  и произведение  $ab$  определено, то  $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} ab$ .

◄ Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то  $f(x)g(x) - ab = (f(x) - a)g(x) + a(g(x) - b) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} 0$  (согласно каким фактам?). Поэтому в силу АКС  $f(x)g(x) \rightarrow ab$ .

Предположим, что  $b = \infty$ ,  $a > 0$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $c \in ]0, a[$ . Поскольку  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a$ ,  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} \infty$ , то согласно ТНП и АКС  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} c$  и  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} \frac{t}{c}$ . Следовательно,  $f(x)g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{>} c \frac{t}{c} = t$  и, значит,  $f(x)g(x) \rightarrow \infty = ab$ .

Другие возможные случаи исследуются аналогично. ►

**Теорема об обратной величине предела.** Обратная величина предела является пределом обратной величины: если  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} a \neq 0$ , то  $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow p|S}{\rightarrow} \frac{1}{a}$ .

◄ Пусть  $c \in ]0, |a|[$ . Так как  $|f(x)| \rightarrow |a|$ , то согласно ТНП  $|f(x)| \underset{x \rightarrow p|S}{>} c$ . Следовательно,  $\frac{1}{|f(x)|} \underset{x \rightarrow p|S}{<} \frac{1}{c}$ , т. е. функция  $\frac{1}{f(x)}$  асимптотически ограничена при  $x \rightarrow p|S$ .

Если  $|a| < \infty$ , то

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|af(x)|} |a - f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow p|S} 0$$

как произведение ограниченной на бесконечно малую.

Предположим, что  $|a| = \infty$ , и пусть  $\varepsilon > 0$ . Согласно АКС  $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$  и потому  $|\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon$ . Значит,  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0 = 1/a$ . ►

**Теорема о пределе композиции (ТПК).** Пусть отображение  $f : X \rightarrow Y$  представлено в виде композиции отображений  $\varphi : X \rightarrow Z$  и  $\psi : Z \rightarrow Y$  ( $f = \psi \circ \varphi$ ), причём  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} q$ , а  $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow q|Z} a$ . Тогда  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} a$ .

◄ Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $a$ . Так как  $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow q|Z} a$ , то у точки  $q$  имеется такая окрестность  $V$ , что

$$(*) \quad \psi(z) \in U \text{ для каждого } z \in V \cap Z.$$

Так как  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} q$ , и  $\varphi(X) \subset Z$ , то у точки  $p$  имеется такая окрестность  $W$ , что для всякого  $x \in S \cap W$   $\varphi(x) \in V$  и  $f(x) \in Z$ , т. е.  $f(x) \in V \cap Z$ . Поэтому согласно соотношению (\*) для каждого  $x \in V \cap S$  имеем  $f(x) = \psi(\varphi(x)) \in U$ . ►

**Упражнения. 0.** Частным случаем теоремы о пределе композиции является теорема о пределе подпоследовательности.

1. Приписки  $x \rightarrow p|S$  и  $z \rightarrow q|Z$  в ТПК нельзя заменить классическими приписками  $x \rightarrow p$  и  $z \rightarrow q$ . Пример: если  $\varphi(x) = |x \sin \frac{1}{x}|$  при  $x \in X = ]0, \infty[$ ,  $\psi(z) = \text{sign } z$  при  $z \in Z = [0, \infty[$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $p = q = a = 0$ , то  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ,  $\psi(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ , в то время как функция  $f(x) := \psi(\varphi(x))$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ .

**Критерий сходимости Гейне.** Функция  $f(x)$  имеет предел при  $x$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S \subset \text{Dom } f$ , в том и только в том случае, когда она каждую последовательность  $s_n \in S$ , сходящуюся к  $p$ , переводит в сходящуюся последовательность  $f(s_n)$  (**условие Гейне**). В этом случае для каждой такой последовательности  $s_n$  справедливо равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{x \rightarrow p|S} f(x)$ .

◄ Предположим, что  $f(x) \rightarrow a |_{x \rightarrow p|S}$ . Пусть  $s_n$  — последовательность точек множества  $S$ , сходящаяся к  $p$  := *пробная последовательность*, и пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $a$ . В этом случае имеется такая окрестность  $V$  точки  $p$ , что  $f(V \cap S) \subset U$ , и существует такой номер  $m$ , что  $s_n \in V \cap S$  для любого  $n \geq m$ . Следовательно,  $f(s_n) \in U$  для каждого такого  $n$ .

Предположим теперь, что выполнено условие Гейне. Пусть  $s_n$  — какая-нибудь пробная последовательность и  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n)$ . Заметим, что  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n)$  для любой пробной последовательности  $t_n$ . Рассмотрим смешанную последовательность  $s_0, t_0, \dots, s_k, t_k, \dots$  и обозначим ее  $n$ -й член через  $r_n$ . Последовательность  $r_n$  пробная и по условию Гейне последовательность  $f(r_n)$  имеет предел и, значит, ее подпоследовательности  $f(r_{2n}) = f(s_n)$  и  $f(r_{2n+1}) = f(t_n)$  имеют тот же предел.

Покажем теперь, что  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} a$ . Пусть  $U \in \mathcal{N}(a)$ . Достаточно установить наличие такой окрестности  $V$  точки  $p$ , что  $f(x) \in U$  для любого  $x \in V \cap S$ . Допустим, однако, что это не так, т. е. в каждой окрестности  $V$  точки  $p$  имеется такая точка  $t \in V \cap S$ , образ  $f(t)$  которой лежит вне  $U$ .

Рассмотрим такую последовательность  $V_0 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$  окрестностей точки  $p$ , что в любой окрестности точки  $p$  содержится некоторая окрестность  $V_n$  (такие системы окрестностей точки называют *базисными*). По нашей гипотезе для каждого номера  $n$  найдется такая точка  $t_n \in V_n \cap S$ , что  $f(t_n) \notin U$ . Легко проверить, что последовательность  $t_n \in S$  пробная и потому  $f(t_n) \xrightarrow{x \rightarrow p|S} a$ . Стало быть,  $f(t_n) \in U$ . Последнее несовместимо с тем, что  $f(t_n) \notin U \forall n \rightarrow \mathbb{N}$ . Противоречие. ►

**Упражнения.** 0. Частным случаем теоремы о пределе композиции является теорема о пределе подпоследовательности.

1. Пусть  $f$  — функция, определенная на интервале  $T$ , и  $p \in T$ . Тогда  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow p} a \Leftrightarrow f(x) \xrightarrow{x \searrow p} a$  и  $f(x) \xrightarrow{x \nearrow p} a$ .

2. Пусть  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_k(x), \Psi(x)$  — такие высказывания, что  
 а)  $\Phi_i(x)|_{x \rightarrow p|S} \forall i \{1, \dots, k\}$  и  
 б) для всякого  $x$ , для которого истинно каждое высказывание  $\Phi_i(x)$ , справедливо  $\Psi(x)$ . Тогда  $\Psi|_{x \rightarrow p|S}$ .

(Эта "лемма об асимптотической импликации" негласно использовалась в нескольких теоремах. В каких именно?)

3. Какие утверждения этого параграфа являются следствиями критерия Гейне и соответствующих фактов о пределе последовательностей?

## § 2.2. Асимптотические отношения сравнения

Будем говорить, что функция  $f(x)$  бесконечно мала относительно функции  $g(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S$ , и писать  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{=} o(g(x))$ , если для каждого  $\varepsilon > 0$  справедливо следующее асимптотическое неравенство  $|f(x)| \underset{x \rightarrow p|S}{\leq} \varepsilon|g(x)|$ . В этом случае гово-

рят также, что  $f(x)$  есть о-малое от  $g(x)$  при  $x \rightarrow p|S$ .

Будем говорить, что  $f(x)$  есть О-большое от  $g(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S$ , и писать  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{=} O(g(x))$ , если найдется такая константа  $C \in \mathbb{R}$ , что  $|f(x)| \underset{x \rightarrow p|S}{\leq} C|g(x)|$ .

Будем говорить, что функция  $f(x)$  эквивалентна функции  $g(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $p$  по  $S$ , и писать  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\sim} g(x)$ , если  $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{=} o(g(x))$ .

**Упражнения.** 1. Если  $k < n$ , то  $x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^k)$ ,  $x^k \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(x^n)$ ;  
 $x^n \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(e^x)$ ,  
 2. Пусть  $g(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\neq} 0$ . Тогда

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0;$$

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1;$$

$$f(x) = O(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = O(1) \Leftrightarrow \text{функция } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ асимптотически ограничена при } x \rightarrow p|S.$$

Ниже всюду в этой главе под знаками  $\sim, \rightarrow, = o, = O$ , где нет приписки  $x \rightarrow p|S$ , она незримо присутствует. То же происходит с выражением  $(x)$ .

### Свойства асимптотической эквивалентности

1)  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{\sim} g(x) \Leftrightarrow$  существует такая функция  $\gamma(x)$ , стремящаяся к 1 при  $x \rightarrow p|S$ , что  $f(x) \underset{x \rightarrow p|S}{=} \gamma(x)g(x)$ .

◀ Необходимость. Пусть  $f \sim g$ . Если в точке  $x$  дробь  $f(x)/g(x)$  определена, то положим  $\gamma(x) = f(x)/g(x)$ , а, если — нет, то —  $\gamma(x) = 1$ . Покажем, что  $\gamma \rightarrow 1$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  и пусть  $V$  — такая окрестность точки  $p$ , что  $\forall x \in V \cap S |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$ . Если  $x \in V \cap S$  — точка, в которой дробь  $f/g$  определена, то

$$|\gamma(x) - 1| = \left| \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon.$$

Если же в точке  $x$  эта дробь неопределена, то  $|\gamma(x) - 1| = 0 \leq \varepsilon$ .

Достаточность. Если  $\gamma$ , — функция, указанная в утверждении 1), то  $|f - g|_{x \rightarrow p|S} = |\gamma - 1||g|_{x \rightarrow p|S} = o(g)$ . ►

2) Отношение асимптотической эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно:  $f \sim f$ ;  $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ ;  $f \sim g \sim h \Rightarrow f \sim h$ ;

3)  $f_1 \sim g_1$  и  $f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ ;

4)  $f \sim g \rightarrow a \Rightarrow f \rightarrow a$  •

**Упражнения.**

1.  $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ .  $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$ .
2.  $(f = o(g), g = O(h)) \Rightarrow f = o(h)$ .
3.  $(f = O(g), g = o(h)) \Rightarrow f = o(h)$ .
4.  $(f_1 = o(g_1), f_2 = O(g_2)) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ .
5.  $(f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2)) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(|g_1| + |g_2|)$ .
6. При  $x \rightarrow 0$  всякий полином  $P(x)$  эквивалентен своему младшему члену, а при  $x \rightarrow \infty$  — старшему.
7.  $e^x - (+ \dots + x^7/7!) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^8/8!$ .
8.  $\cos x - (1 - x^2/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4/4!$ .
9.  $\sin x - (x - x^3/3!) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^5/5!$ .
10.  $\ln(1 + x) - (x - x^2/2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3/3$ .
11.  $\arctan x - (x - x^3/3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^5/5$ .

**Глава 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ**

§ 3.1. Непрерывность функции в точке

Говорят, что функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $p \in X$ , если  $f(x) \underset{x \rightarrow p|X}{\rightarrow} f(p)$ . Функцию  $f: X \rightarrow Y$  называют непрерывной, если она непрерывна в каждой точке множества  $X$ .

Расшифровав приведенное определение, получаем следующий **топологический критерий непрерывности**. Функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $p \in X$  в том и только в том случае, когда

$$\forall U \in \mathcal{N}(f(p)) \exists V \in \mathcal{N}(p) \mid (\forall x \in X \cap V f(x) \in U)$$

(топологическое условие непрерывности).

Утверждение, обрамленное большими скобками, равносильно каждой из двух следующих формул:

$$f(V \cap X) \subset U, \quad V \cap X \subset f^{-1}(U).$$

**Теорема о непрерывности композиции.** Если функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $p \in X$ , а функция  $g: S \rightarrow Z$  непрерывна в точке  $f(p) \in S \subset Y$ , то композиция  $g \circ f$  этих функций непрерывна в точке  $p$ .

◀ Область задания композиции  $g \circ f$  есть множество

$$X_0 := \{x \in X \mid f(x) \in S\} = f^{-1}(S).$$

Пусть  $U \in \mathcal{N}(g(f(p)))$ . Функция  $g$  непрерывна в точке  $f(p)$ . Поэтому имеется такая окрестность  $V$  точки  $f(p)$ , что  $g(s) \in U \forall s \in V \cap S$ . Функция  $f$  непрерывна в точке  $p$ . Поэтому имеется такая окрестность  $W$  точки  $p$ , что  $f(x) \in V \forall x \in W \cap X$ . Следовательно, для каждой точки  $x \in W \cap X_0$  имеем  $f(x) \in V \cap S$  и потому  $g(f(x)) \in U$ , ч.т.д. ▶

**Упражнения 0.** Тожественное отображение  $id_X: X \rightarrow X$  непрерывно.

1. Любая константа (постоянная функция) непрерывна.  
 2. Сумма и произведение непрерывных функций непрерывны: если функции  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны в точке  $p \in X$ , то функции  $f + g$  и  $f \cdot g$  также непрерывны в этой точке.

3. Функция  $1/f$  непрерывна в точке  $p$ , если функция  $f$  непрерывна в этой точке и  $f(p) \neq 0$ .

4. Каждая рациональная функция, т. е. функция, представимая в виде отношения двух полиномов, непрерывна.

5. **Лемма о непрерывности промежуточной функции:** если функции  $f, u, v: X \rightarrow \mathbb{R}$  таковы, что  $f(x) \in [u(x), v(x)]$ ,  $u(p) = v(p)$  и функции  $u$  и  $v$  непрерывны в точке  $p$ , то функция  $f$  также непрерывна в точке  $p$ .

6. **Устойчивость строгих неравенств:** если функции  $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  непрерывны в точке  $p \in X$  и  $f(p) < g(p)$ , то  $f(x) < g(x)$  в некоторой окрестности точки  $p$ , т. е.  $\exists V \in \mathcal{N}(p) \mid f(x) < g(x) \forall x \in V \cap X$ .

7. **Локальный характер непрерывности:** отображение  $f: X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $p \in X$  тогда и только тогда, когда у точки  $p$  имеется такая окрестность  $V$ , что отображение  $f: V \cap X \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $p$ .

8. **Критерий непрерывности Гейне:** функция  $f: X \rightarrow Y$  непрерывна в точке  $p \in X$  в том и лишь в том случае, когда она каждую последовательность  $x_n \in X$ , сходящуюся к точке  $p$ , переводит в сходящуюся последовательность. В этом случае  $f(x_n) \rightarrow f(p)$  для каждой такой последовательности.

9. **Лемма о непрерывности огибающих.** Функция  $f$ , заданная на промежутке  $X$ , непрерывна в точке  $p \in X \Leftrightarrow$  функции  $u(x) := \inf\{f(t) : t \in [p, x]\}$  и  $h(x) := \sup\{f(t) : t \in [p, x]\}$  непрерывны в

этой точке. Нарисуйте графики верхней и нижней огибающих  $h$  и  $u$  для функции  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $f(0) = 0$ , и точки  $p = 0$ .

### § 3.2. Глобальная непрерывность

**Теорема Вейерштрасса об экстремумах.** На отрезке любая непрерывная вещественная функция обладает наибольшим и наименьшим значениями: если отображение  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно, то найдутся такие точки  $p, q \in [a, b]$ , что  $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$  для любой точки  $x \in [a, b]$ .

◀ Пусть  $s = \sup f([a, b])$  и  $u_n$  — какая-нибудь последовательность точек интервала  $] -\infty, s[$ , сходящаяся к  $s$ . Поскольку  $u_n < s$ , то найдется такая точка  $x_n \in [a, b]$ , что  $f(x_n) \in [u_n, s[$ . По теореме Вейерштрасса о частичных пределах последовательность  $x_n$  обладает подпоследовательностью  $x_{n_k}$ , сходящейся к некоторой точке  $q \in [a, b]$ . Почему? Поскольку функция  $f$  непрерывна, то  $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(q)$ . А так как  $f(x_{n_k}) \in [u_{n_k}, s[$  и  $u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$ , то  $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$ . Ввиду единственности предела  $f(q) = s$ .

Существование наименьшего значения функции  $f$  устанавливается аналогично. ▶

**Следствие.** На отрезке всякая непрерывная вещественная функция ограничена.

**Упражнение.** Привести примеры, показывающие, что для разрывных функций на отрезке, а также для непрерывных функций на промежутках иных типов заключения предыдущих двух утверждений не верны.

**Теорема Больцано—Коши о промежуточных значениях.** Если функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, то прообраз  $f^{-1}(z)$  любой точки  $z$  отрезка  $[f(a), f(b)]$  непуст и, более того, содержит наибольший и наименьший элементы.

◀ Установим наличие максимального элемента множества  $f^{-1}$ , предполагая для определенности, что  $a \leq b$  и что  $f(a) \leq f(b)$ .

Пусть  $z \in [f(a), f(b)]$  и  $M_z := \{x \in [a, b]: f(x) \leq z\}$  и  $s := \sup M_z$ . Поскольку  $a \in M_z \leq b$ , то  $s \in [a, b]$ . Так как  $M_z$  непусто, то найдется последовательность  $x_n \in M_z$ , сходящаяся к  $s$ . А так как функция  $f$  непрерывна, то  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(s)$ . Поскольку  $f(x_n) \leq z$ , то согласно ТНП  $f(s) \leq z$ .

Покажем, что  $f(s) \geq z$ . Это так, если  $s = b$ . Поэтому будем считать, что  $s < b$ . Так как на полуинтервале  $]s, b[$  нет точек множества  $M_z$ , то  $f(t) > z$  для каждого  $t \in ]s, b[$ . Поэтому в силу непрерывности функции  $f$  и ТНП для всякой последовательности точек  $t_n$  этого полуинтервала,

сходящейся к точке  $s$ ,  $f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \geq z$ .

Таким образом,  $f(s) = z$ , т. е.  $s \in f^{-1}(z)$ , причём  $s = \max f^{-1}(z)$ , ибо  $f(t) > z \forall t \in ]s, b]$ .

По аналогичной причине множество  $f^{-1}(z)$  содержит наименьший элемент. ►

**Упражнение.** Непрерывная вещественная функция преобразует промежутки в промежутки, а отрезки — в отрезки.

**Признак Больцано строгой монотонности.** На промежутке  $T \subset \overline{\mathbb{R}}$  любая непрерывная инъективная вещественная функция  $f$  строго монотонна.

◄ Достаточно показать, что если  $f$  строго возрастает на паре точек  $x, y \in T$ , то на любой другой паре различных точек она также строго возрастает.

Сначала заметим, что функция  $f$  строго возрастает (убывает) на тройке точек  $x_1 < x_2 < x_3$  промежутка  $T$ , если она строго возрастает (убывает) на паре точек  $x_1 < x_2$ .

Допустим, что это не так, например, что  $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ . Тогда согласно теореме Больцано—Коши прообраз  $f^{-1}(z)$  любой точки  $z$  интервала  $] \max(f(x_1), f(x_3)), f(x_2) [$  имеет представителей на каждом из интервалов  $]x_1, x_2[$  и  $]x_2, x_3[$ . Это несовместимо с инъективностью отображения  $f$ .

Из доказанного вытекает, что функция  $f$  строго возрастает (убывает) на четверке точек  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , если она строго возрастает (убывает) на паре точек  $t_1 < t_2$ . Следовательно,  $f$  не может на одной паре точек строго возрастать, а на другой — убывать. ►

**Теорема об обратной функции (ТОФ).** Если функция  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  на промежутке  $T$  непрерывная и строго возрастающая, то  
А) образ  $f(T)$  этого промежутка является промежутком того же типа, что и  $T$ ;

В) отображение  $f : T \rightarrow f(T)$  обратимо;

С) обратное к нему отображение  $g : f(T) \rightarrow T$  непрерывное и строго возрастающее.

◄ Достаточно считать, что  $T$  содержит более двух точек.

А) Множество  $X := f(T)$  является промежутком согласно теореме Больцано—Коши. А так как функция  $f$  строго возрастает на  $T$ , то точка  $t \in T$  будет максимальным элементом промежутка  $T$  тогда и только тогда, когда её образ  $f(t)$  окажется максимальным элементом промежутка  $X$ . То же самое можно сказать и о минимальных элементах.

В) Отображение  $f : T \rightarrow X = f(T)$  инъективно и сюръективно, т. е. биективно и, значит, обратимо согласно критерию обратимости (§ 0.2).



Пусть  $g := f^{-1} : X \rightarrow T$  — обратное к нему отображение.

С) Легко видеть, что отображение  $g$  строго возрастающее. Покажем, что оно непрерывно в каждой точке  $p \in X$ . Пусть  $U$  — какая-либо окрестность точки  $q = g(p)$ . Согласно топологическому критерию непрерывности нам достаточно установить наличие такой окрестности  $V$  точки  $p$ , что  $V \cap X \subset g^{-1}(U)$ .

Допустим, что  $q$  — внутренняя точка промежутка  $T$ . В этом случае  $U$  содержит некоторый интервал  $S \subset T$ , содержащий точку  $q$ . Согласно пункту А множество  $V := f(S)$  является интервалом и, значит, окрестностью точки  $p$ . Поскольку  $V \subset X$ , а отображения  $f$  и  $g$  взаимно обратны, то  $V \cap X = V = f(S) = g^{-1}(S) \subset g^{-1}(U)$ .

Допустим теперь, что  $q$  — крайняя точка промежутка  $T$ , например  $q = \min T$ . В этом случае  $U$  содержит некоторый отрезок вида  $[q < r]$ . Согласно пункту А  $f([q < r]) = [f(q) < f(r)]$ . Положим  $V := [-\infty < f(r)]$  и покажем что  $V$  является искомой окрестностью точки  $p$ . Так как отображения  $f$  и  $g$  взаимно обратны, то  $V \cap X = [p < f(r)] = f([q < r]) = g^{-1}([q < r]) \subset g^{-1}(U)$ . ►

В "рациональном мире" все четыре предшествующие теоремы не верны. Противоречащие примеры:  
 $\alpha(x) = x^3 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  (к теоремам Больцано—Коши и об обратной функции);

$\beta(x) = 3 - x^3 : [0, 3] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  (к остальным утверждениям).

### § 3.3. Основные элементарные функции

**0. Функция  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .** Пусть  $n$  — положительное натуральное число. Отображение  $f_n(x) := x^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно. Если  $n$  — нечетное число, то это отображение обратимо согласно ТОФ. Если же  $n$  — число четное, то обратимым является отображение  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . В каждом из этих двух случаев обратное к  $f_n$  отображение непрерывное и строго возрастающее. Его принято обозначать символом  $\sqrt[n]{x}$  или  $x^{1/n}$  и называть *корнем  $n$ -й степени*.

**1. Экспонента и натуральный логарифм.** Функция  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная и строго возрастающая. Отображение  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  обратимо согласно ТОФ. Обратное к нему отображение называют *натуральным логарифмом* и обозначают  $\ln$ . Функция  $\ln$  непрерывная и строго возрастающая.

#### 2. Показательная функция и логарифм.

**Теорема-определение.** Для каждого числа  $a \in ]0, \infty[$  существует и притом лишь одна монотонная функция  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая следующим двум условиям:

А)  $f_a(1) = a$  (начальное условие),

В)  $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$  (экспоненциальное свойство).

Функцию  $f_a$  называют *показательной функцией*, а число  $a$  — ее основанием. Значение этой функции в точке  $x$  обозначают  $a^x$ .

◀ Пусть  $a \in ]0, \infty[$ . Для каждого  $x \in \mathbb{R}$  положим  $f_a(x) := \exp(x \ln a)$ .

Функция  $f_a$  монотонна, непрерывна и обладает свойствами А и В.

Пусть  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — какая-нибудь функция, обладающая свойствами А и В. Тогда:

$g(0) = 1$ , ибо  $a = g(1+0) = a \cdot g(0)$ ;

$g(-x) = 1/g(x)$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$ ;

$g(m/n) = \sqrt[n]{a^m}$  для любых натуральных  $m$  и  $n$ , поскольку  $(g(m/n))^n = g(n \cdot (m/n)) = a^m$ .

Из этих трех равенств следует, что любые две функции, обладающие свойствами А и В, совпадают на множестве рациональных чисел.

Допустим теперь, что наша функция  $g$  монотонна, например возрастает, и пусть  $p$  — произвольная точка числовой прямой. Рассмотрим какие-нибудь последовательности рациональных чисел  $q_n < p$  и  $r_n > p$ , сходящиеся к точке  $p$ . По доказанному  $f_a(q_n) = g(q_n) \leq g(p) \leq g(r_n) = f_a(r_n)$ . Так как функция  $f_a$  непрерывна, то  $f_a(p) = \lim f_a(q_n) \leq g(p) \leq \lim f_a(r_n) = f_a(p)$ . Значит,  $g(p) = f_a(p) \forall p \in \mathbb{R}$ . ▶

**Следствия.** 1.  $e^x = \exp(x)$ .

2.  $a^x = e^{x \ln a}$  и, стало быть,  $a^x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(x \ln a)^n}{n!}$ . (Ответы на вопросы из вводной части § 1.2.)

Функция  $a^x : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  при  $a \neq 1$  переменной  $x$  обратима согласно ТОФ. Обратную к ней функцию обозначают  $\log_a$  и называют *логарифмом при основании  $a$* . Функция  $\log_a$  непрерывная и строго монотонная.

**3. Функции  $\cos$  и  $\arccos$ .** Функция  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Отображение  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  обратимо согласно ТОФ. Обратное к нему отображение обозначают  $\arccos$ . Отображение  $\arccos$  непрерывное и строго убывающее.

**4. Функции  $\sin$  и  $\arcsin$ .** Функция  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Отображение  $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$  обратимо согласно ТОФ. Обратное к нему отображение обозначают  $\arcsin$ . Отображение  $\arcsin$  непрерывное и строго возрастающее.

**5. Функции  $\tan$  и  $\arctan$ .** Функция  $\tan : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}$  обратима согласно ТОФ. Обратную к ней функцию будем обозначать  $\arctan$ . Обе эти функции непрерывные и строго возрастающие.

## Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

### § 4.1. Производная и дифференциал

Будем говорить, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $p$  и писать  $f \in \mathcal{D}(p)$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и если дробь  $\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ , рассматриваемая как функция переменной  $t$ , имеет конечный предел при  $t$ , стремящемся к  $p$ . Этот предел именуют производной функции  $f$  в точке  $p$  и обозначают  $f'(p)$  или  $Df(p)$ . Символ  $\mathcal{D}(p)$  обозначает класс всех функций, дифференцируемых в точке  $p$ . Функцию  $f$  называют дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке своей области определения  $\text{Dom } f$ .

Множество всех точек, в которых функция  $f$  дифференцируема, будем обозначать  $\text{Dom } f'$ . Функцию, которая каждой точке  $t \in \text{Dom } f'$  сопоставляет число  $f'(t)$ , называют производной функции  $f$  и обычно обозначают одним из следующих символов  $f'$ ,  $Df$ ,  $\frac{df}{dx}$ . Последний символ используют в том случае, когда выражение  $f$  содержит несколько букв, которые могут быть объявлены переменными, но  $f$  рассматривают как функцию переменной  $x$ . Например,

$$\frac{d(x-y)}{dx} = 1, \quad \frac{d(x-y)}{dy} = -1.$$

**Кинематическая интерпретация производной.** Со времён Ньютона значение выражения  $f(t)$  трактуют как положение движущейся точки в момент времени  $t$ . В этом случае дробь  $\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$  называют средней скоростью на промежутке времени от  $p$  до  $t$ , а её предел при  $t$ , приближающемся к  $p$ , т. е. производную  $f'(p)$  называют (мгновенной) скоростью функции  $f$  в момент времени  $p$ .

**Геометрическая интерпретация производной.** Пусть  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая в точке  $p$  функция. Отметим какую-нибудь точку  $q \in X$  и рассмотрим прямую  $L_q$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , проходящую через точки  $(p, f(p))$  и  $(q, f(q))$  графика  $\Gamma_f$  функции  $f$ . Эта прямая является графиком функции  $l_q(x) = f(p) + k_q \cdot (x - p)$ , где  $k_q = \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$  — угловой коэффициент прямой  $L_q$ . Если  $q$  приближать к  $p$ , то  $k_q$  устремится к  $f'(p)$  и, следовательно, прямая  $L_q$  будет стремиться занять положение прямой  $K$ , являющейся графиком функции  $l(x) = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$ . Эту прямую называют касательной к графику функции  $f$  в точке  $(p, f(p))$ . Позже будут указаны более глубокие причины такого названия. Таким образом, значение производной есть угловой коэффициент касательной к графику исходной функции в соответствующей точке графика.

Если область задания функции  $f$  содержит отрезок вида  $[p < q]$ , а ее средняя скорость  $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$  имеет предел при  $x$ , стремящемся к  $p$  справа, то этот предел называют *правой производной* функции  $f$  в точке  $p$  и обозначают либо  $D_+f(p)$ , либо  $f'_+(p)$ .

**Упражнения.** 1. Дать определение левой производной  $D_-f(p)$  функции  $f$  в точке  $p$ .

2. Функция  $f$  дифференцируема в точке  $p$  в том и лишь в том случае, когда она определена в некоторой окрестности этой точки и обладает конечными и равными между собой односторонними производными  $D_-f(p)$  и  $D_+f(p)$ . В этом случае  $Df(p) = D_-f(p) = D_+f(p)$ .

**Теорема о лейбницевоm разложении.** Функция  $f$  дифференцируема в точке  $p$  в том и только в том случае, когда она определена в некоторой окрестности этой точки и существует такое линейное отображение  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + \varphi(x), \quad \varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p). \quad (\text{L1})$$

В этом случае  $A(x-p) = Df(p) \cdot (x-p)$ .

◀ Допустим, что  $f \in \mathcal{D}(p)$ . Для каждого  $v \in \mathbb{R}$  положим  $A(v) := Df(p)v$  и пусть  $\varphi(x) := f(x) - (f(p) + A(x-p))$ . Тогда

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(p)}{x-p} = \frac{f(x) - f(p)}{x-p} - Df(p) \underset{x \rightarrow p}{\rightarrow} 0.$$

Пусть теперь функция  $f$  и линейное отображение  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  таковы, что справедлива формула (L1). Поскольку отображение  $A$  линейно, то существует такое число  $a \in \mathbb{R}$ , что для любого  $v \in \mathbb{R}$  имеет место равенство  $A(v) = av$  ( $a = A(1)$ ). Таким образом,  $f(x) - (f(p) + a \cdot (x-p)) \underset{x \rightarrow p}{=} o(x-p)$  и, стало быть,

$$\frac{f(x) - f(p)}{x-p} = \frac{a \cdot (x-p) + \varphi(x)}{x-p} \underset{x \rightarrow p}{\rightarrow} a, \quad \text{т. е. } Df(p) = a. \quad \blacktriangleright$$

Линейное отображение  $A$ , для которого справедлива формула L1, называют *дифференциалом* функции  $f$  в точке  $p$  и обозначают  $df(p)$ . Образ элемента  $v \in \mathbb{R}$  при отображении  $df(p)$  будем обозначать  $df(p)v$  или  $df(p)(v)$  и называть значением дифференциала  $df$  в точке  $p$  на элементе (векторе)  $v$ . Особо отметим формулу

$$df(p)v = f'(p) \cdot v \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (\text{L2})$$

**Примеры.** 0. Всякая постоянная функция  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема. В любой точке  $p \in \mathbb{R}$  ее производная и дифференциал равны

нулю:  $Dc(p) = 0 \in \mathbb{R}$ , а  $dc(p) = 0$ -отображение, т. е.  $dc(p)v = 0 \forall v \in \mathbb{R}$ .

1. Каждое линейное отображение  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируемо. Его дифференциал в любой точке  $p \in \mathbb{R}$  совпадает с ним самим, а производная постоянна.

**Лемма об "о-малое".** Пусть  $\varphi : X \rightarrow R$  — функция, равная нулю в точке  $p \in X$ . Тогда  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x-p)^k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  в том и лишь в том случае, когда функция  $\varphi$  представима в виде  $\varphi(x) = \alpha(x)(x-p)^k$ , где  $\alpha$  — функция, непрерывная в точке  $p$  и равная нулю в этой точке.

◀ Легкое следствие определений. ▶

**Следствие.** Всякая функция  $f$ , дифференцируемая в точке  $p$ , непрерывна в этой точке.

◀  $f(x) = f(p) + Df(p)(x-p) + \varphi(x)$ ,  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x-p))$ . ▶

**Правило дифференцирования суммы.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $p$ , то функция  $f+g$  также дифференцируема в точке  $p$  и

$$D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p).$$

**Правило дифференцирования произведения.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $p$ , то функция  $f \cdot g$  также дифференцируема в точке  $p$  и справедлива формула Лейбница

$$D(fg)(p) = Df(p)g(p) + f(p)Dg(p).$$

(Согласно бытующей легенде, Лейбниц первоначально предполагал, что  $D(fg) = DfDg$ .)

◀ Поскольку  $f, g \in \mathcal{D}(p)$ , то множество  $\text{Dom } fg = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$  является окрестностью точки  $p$ .

В силу леммы об "о-малое" лейбницево разложение функций  $f$  и  $g$  имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + Df(p)(x-p) + \alpha(x)(x-p), \\ g(x) &= g(p) + Dg(p)(x-p) + \beta(x)(x-p), \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — функции, непрерывные в точке  $p$  и равные нулю в этой точке. Поэтому

$$f(x)g(x) = f(p)g(p) + (Df(p)g(p) + f(p)Dg(p)) + \gamma(x)(x-p),$$

где  $\gamma$  — функция, непрерывная и равная нулю в точке  $p$ . Остается воспользоваться теоремой о лейбницево разложении дифференциала. ▶

**Правило дифференцирования дроби.** Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $p$  и  $g(p) \neq 0$ , то функция  $f/g$  также диффе-

реницируема в точке  $p$  и справедлива формула

$$\left(\frac{f}{g}\right)' \Big|_p = \frac{f'g - fg'}{g^2} \Big|_p.$$

◀ Поскольку функция  $g$  непрерывна в точке  $p$  и  $|g(p)| > 0$ , то  $|g| > 0$  в некоторой окрестности этой точки (лемма об устойчивости строгих неравенств (§ 3.1)) и потому  $\text{Dom } \frac{1}{g} \in \mathbb{N}(p)$ .

Вычислим производную функции  $\frac{1}{g}$ .

$$\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(p)}\right)(x-p)^{-1} = \frac{g(p) - g(x)}{g(x)g(p)(x-p)} \xrightarrow{x \rightarrow p} \frac{-g'(p)}{(g(p))^2}.$$

Остается продифференцировать произведение  $f \frac{1}{g}$ . ▶

**Правило дифференцирования композиции.** Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $p$ , а функция  $g$  дифференцируема в точке  $f(p)$ , то функция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $p$  и имеет место формула

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \cdot Df(p).$$

◀ 1. Установим, что  $\text{Dom } g \circ f \in \mathcal{N}(p)$ . Поскольку функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точках  $p$  и  $q = f(p)$ , то множества  $\text{Dom } f$  и  $\text{Dom } g$  являются окрестностями точек  $p$  и  $q$  соответственно. Так как функция  $g$  непрерывна в точке  $q$ , то согласно топологическому критерию непрерывности у точки  $p$  имеется такая окрестность  $V$ , что  $f(V \cap \text{Dom } f) \subset \text{Dom } g$ . Следовательно,  $V \cap \text{Dom } f \subset \text{Dom } g \circ f$  и потому множество  $\text{Dom } g \circ f$  является окрестностью точки  $p$ .

2. Благодаря лемме об "о-малое" лейбницево разложение функции  $g$  принимает вид  $g(y) = g(q) + Dg(q)(y-q) + \beta(y)(y-q)$ , где  $\beta$  — функция, непрерывная в точке  $q$  и равная нулю в этой точке. Отсюда  $g(f(x)) = g(f(p)) + Dg(f(p))(f(x) - f(p)) + \beta(f(x))(f(x) - f(p))$ . И так как функция  $\beta(f(x))$  непрерывна в точке  $p$  и равна нулю в этой точке, то

$$\frac{g(f(x)) - g(f(p))}{x-p} = (Dg(f(p)) + \beta(f(x))) \frac{f(x) - f(p)}{(x-p)} \xrightarrow{x \rightarrow p} Dg(f(p)) Df(p). \blacktriangleright$$

**Правило дифференцирования обратной функции.** Пусть  $f: ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  и  $g: ]c, d[ \rightarrow ]a, b[$  — взаимно обратные отображения, причём:

- 1) отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $p$  и  $Df(p) \neq 0$ ;
- 2) отображение  $g$  непрерывно в точке  $q = f(p)$ .

Тогда отображение  $g$  дифференцируемо в точке  $q$  и справедлива

формула

$$Dg(q) = (Df(g(q)))^{-1}.$$

◀ 1. Множество  $\text{Dom } g$  есть окрестность точки  $q$ , поскольку интервал является окрестностью любой своей точки.

2. Так как функция  $f \in \mathcal{D}(p)$ , то ее можно представить в виде  $f(x) = f(p) + a(x-p) + \alpha(x)(x-p)$ , где  $a = Df(p)$  и  $\alpha$  — функция, непрерывная в точке  $p$  и равная нулю в этой точке. Отсюда для каждого  $y \in ]c, d[$  ввиду равенства  $f(g(y)) = y$  получаем равенство

$$y = q + a(g(y) - g(q)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(q)).$$

И поскольку  $a \neq 0$ , а функция  $\alpha(g(y))$  непрерывна в точке  $q$  и равна нулю в этой точке, то

$$\frac{g(y) - g(q)}{y - q} \underset{y \rightarrow q}{=} \frac{1}{a - \alpha(g(y))} \underset{y \rightarrow q}{\rightarrow} a^{-1} = (Df(g(q)))^{-1}. \blacktriangleright$$

**Упражнения.** 0. Составить и запомнить таблицу производных известных функций.

1. Дифференцируемость, производная и дифференциал суть локальные понятия: если функции  $f$  и  $g$  совпадают в некоторой окрестности точки  $p$  и  $f \in \mathcal{D}(p)$ , то  $g \in \mathcal{D}(p)$ ,  $Dg(p) = Df(p)$ ,  $dg(p) = df(p)$ .

2. **Лемма о производной промежуточной функции:** если функции  $f, u, v : X \rightarrow \mathbb{R}$  таковы, что  $f(x) \in [u(x), v(x)]$ ,  $u, v \in \mathcal{D}(p)$ ,  $u(p) = v(p)$ ,  $u'(p) = v'(p)$ , то  $f \in \mathcal{D}(p)$  и  $Df(p) = Dv(p)$ .

3. Если условие 2) правила дифференцирования обратного отображения заменить требованием непрерывности отображения  $f$ , то теорема останется истинной.

4. Пусть  $f \in \mathcal{D}(p)$ , а  $x_n$  и  $y_n$  — такие сходящиеся к точке  $p$  последовательности, что  $x_n \neq y_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} Df(p)$ , если выполнено хотя бы одно из двух следующих условий: 1)  $p \in ]x_n, y_n[$ ; 2) функция  $f$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $p$ , а ее производная непрерывна в точке  $p$ . Нужны ли дополнительные условия?

5. Пусть  $w_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — такая  $2^{1-n}$ -периодическая функция, что  $w_n(x) = |x|$  при  $x \in [-2^{-n}, 2^{-n}]$ , и пусть  $w(x) = \sum_{n \geq 0} w_n(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ . Функция  $w$  непрерывна, но в любой точке не дифференцируема. Такие функции впервые обнаружил Вейерштрасс.

### Некоторые замечания о символике

1. На практике выражения типа  $x^2$  и  $e^x$  трактуют и как функции переменной  $x$ , и как значения этих функций в точке  $x$ . Выбор трактовки диктуется смыслом текста (контекстом).

2. Результат вычисления производной функции  $f(x)$  переменной  $x$  часто записывают так:  $(f(x))' = g(x)$  или  $\frac{d}{dx}(f(x)) = g(x)$ . Например,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}(t^x) = t^x \ln t, \quad \frac{d}{dt}(t^x) = \frac{t^{x-1}}{x+1}.$$

Такая форма записи равенства функций формально некорректна, так как, заменив букву  $x$  именем конкретного числа, можно получить неверное и даже нелепое равенство. Подставьте цифру 5 в первые два равенства вместо буквы  $x$ , а в третье — вместо буквы  $t$ .

Чтобы узаконить использование равенств типа  $(f(x))' = g(x)$ , надо считать такое равенство синонимом следующих высказываний: "функции  $(f(x))'$  и  $g(x)$  переменной  $x$  совпадают на множестве  $\text{Dom } f'$ ", " $\forall p \in \text{Dom } f' \quad (f(x))'|_p = g(p)$ ".

3. Так как тождественное отображение  $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  определяется формулой  $id(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , то выражение (букву)  $x$  можно трактовать как функцию переменной  $x$ , т.е. как тождественное отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . При таком толковании дифференциал тождественного отображения обозначают символом  $dx$ . Тождественное отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , будучи линейным, дифференцируемо в каждой точке  $p \in \mathbb{R}$ , причём его дифференциал в этой точке является тождественным отображением, т.е. имеет место формула

$$dx(p)(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (\text{L3})$$

**Лейбницево представление дифференциала.** Для каждой функции  $f$  переменной  $x$  имеет место формула  $df(x) = f'(x)dx$ . Это означает, что для каждой точки  $p$ , в которой функция  $f$  дифференцируема, выполнено равенство  $df(p) = f'(p)dx$ .

◀ Чтобы установить это равенство, левая и правая части которого суть линейные функции, надо проверить, что

$$df(p)(v) = f'(p)dx(p)(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Это — прямое следствие формул L2 и L3. ▶

Осторожно! В установленном равенстве лишь вместо буквы  $p$ , обрамлённой скобками, можно помещать имя любой точки, в которой функция  $f$  дифференцируема. Выражение  $dx$  служит обозначением



дифференциала отображения  $x$  и потому в него вместо буквы  $x$  нелепо подставлять имя какой-либо точки из  $\mathbb{R}$ .

Однако, если в формуле  $df(x) = f'(x)dx$  заменить букву  $x$  выражением  $\varphi(t)$ , символизирующим функцию переменной  $t$ , и воспользоваться лейбницевым представлением дифференциала функции  $\varphi(t)$ , то получим равенство  $df(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ , являющееся лейбницевым представлением композиции  $f \circ \varphi$ .

**Лемма о знаке производной.** 1) Если  $D_+f(p) > 0$  ( $< 0$ ), то найдется такой интервал  $]p < b[$ , что

$$\forall x \in ]p < b[ \quad f(x) > f(p) \quad (f(x) < f(p)).$$

2) Если  $D_-f(p) > 0$  ( $< 0$ ), то найдется такой интервал  $]a < p[$ , что

$$\forall x \in ]a < p[ \quad f(x) < f(p) \quad (f(x) > f(p)).$$

◀ Пусть  $D_-f(p) > 0$ . Поскольку  $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} \xrightarrow{x \nearrow p} D_-f(p) > 0$ , то согласно теореме о неравенстве пределов найдется такой интервал  $]a < p[$ , что для любой точки  $x \in ]a < p[$   $\frac{f(x)-f(p)}{x-p} > 0$  и, следовательно,  $f(x) - f(p) < 0$ .

Другие утверждения леммы устанавливаются аналогично. ▶

Говорят, что  $p$  есть *точка минимума (строгого минимума) функции*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $f(x) \geq f(p) \quad \forall x \in X$  (если  $f(x) > f(p) \quad \forall x \in X \setminus \{p\}$ ). Говорят, что  $p$  есть *точка локального минимума (строгого локального минимума) функции*  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , если у точки  $p$  имеется такая окрестность  $U$ , что  $p$  является точкой минимума (строгого минимума) функции  $f : U \cap X \rightarrow \mathbb{R}$ . Аналогично определяют *точки максимума, строгого максимума, локального максимума и строгого локального максимума функции*. Точки локального минимума и точки локального максимума называют *точками локального экстремума*. Аналогично определяют точки строгого локального экстремума.

**Лемма Ферма (необходимое условие локального экстремума).** Если  $p$  — точка локального экстремума функции  $f$ , то либо  $f$  недифференцируема в этой точке, либо  $Df(p) = 0$ .

◀ Если  $f \in \mathcal{D}(p)$  и  $Df(p) \neq 0$ , то согласно лемме о знаке производной,  $p$  не может быть точкой локального экстремума функции  $f$ .

▶

**Теорема Ролля о среднем.** Если вещественная функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a < b]$  и дифференцируема в каждой его внутренней точке и если  $f(a) = f(b)$ , то имеется такая точка  $p \in ]a, b[$ , что  $Df(p) = 0$ .

◀ Согласно теореме Вейерштрасса об экстремумах, на отрезке  $[a, b]$  имеются такие точки  $p, q$ , что  $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$  при любом  $x \in [a, b]$ . Если  $f(p) = f(q)$ , то  $f$  постоянна на  $[a, b]$  и, стало быть,  $Df = 0$  на всем интервале  $]a, b[$ . В ином случае одна из отмеченных точек принадлежит интервалу  $]a, b[$  и, значит, в силу леммы Ферма является искомой. ▶

**Теорема Лагранжа о среднем.** Если вещественная функция  $f$  непрерывна на ограниченном отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в каждой его внутренней точке, то на интервале  $]a, b[$  найдется такая точка  $p$ , что  $Df(p) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

◀ Пусть  $l(t)$  — функция, чей график есть прямая на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , проходящая через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ , т.е.  $l(t) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$ . Функция  $(f-l)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и, значит, имеется такая точка  $p \in ]a, b[$ , что  $Df(p) - Dl(p) = 0$ . Остается заметить, что  $Dl(p) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . ▶

Заключение теоремы Лагранжа эквивалентно утверждению: касательная в точке  $(p, f(p))$  графика  $\Gamma_f$  параллельна прямой, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ . Почему?

Разность  $f(b) - f(a)$  называют *приращением функции  $f$  от  $a$  до  $b$*  и обозначают  $f|_a^b$ .

Во избежание недоразумений заметим, что для каждой функции  $f$  определена функция  $Df$ , называемая производной функции  $f$ . Областью задания этой функции является множество точек  $\text{Dom } Df$ , в которых функция  $f$  дифференцируема. Поэтому если в каком-либо высказывании, которое предполагается истинным, встречается символ  $Df(x)$ , то это означает, что функция  $f$  дифференцируема в точке  $x$ . Такое соглашение позволяет несколько облегчить предпосылки многих теорем.

**Лемма.** Если функция  $g$  непрерывна на отрезке  $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$  и если  $Dg(t) \geq 0$  в каждой внутренней точке  $t$  этого отрезка, то  $g|_a^b \geq 0$ .

◀ Пусть  $x < y$  — произвольная пара точек интервала  $]a, b[$ . Из теоремы Лагранжа следует, что  $g(x) \leq g(y)$ . Так как функция  $g$  непрерывна, то согласно ТНП  $g(a) = \lim_{x \searrow a} g(x) \leq g(y)$  для всякого  $y \in ]a, b[$ . Отсюда по той же причине  $g(a) \leq \lim_{y \nearrow b} g(y) = g(b)$ . ▶

**Теорема о приращениях.** Если функции  $f$  и  $h$  непрерывны на отрезке  $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$  и  $|Df(t)| \leq Dh(t)$  для всех  $t$  из  $]a, b[$ , за исключением, быть может, конечного множества точек, то  $|f|_a^b| \leq h|_a^b$ .

◀ Пусть  $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$  — такие точки на отрезке

$[a, b]$ , что неравенство  $|Df(t)| \leq Dh(t)$  выполняется в каждой точке  $t \in [a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ . Такое неравенство эквивалентно следующей паре неравенств  $-Dh(t) \leq Df(t) \leq Dh(t)$ . Применяя предыдущую лемму к функции  $g := h - f$  на отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$ , видим, что  $g \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} \geq 0$ . Следовательно,  $g \Big|_a^b = \sum_{k=0}^n g \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} \geq 0$ . Тем самым  $f \Big|_a^b \leq h \Big|_a^b$ . Аналогично устанавливается неравенство  $-h \Big|_a^b \leq f \Big|_a^b$ . ►

### Приложения.

#### 1. Дифференциальные признаки возрастания и убывания.

**Необходимое условие возрастания.** Если дифференцируемая функция возрастает на некотором промежутке, то ее производная на этом промежутке неотрицательна.

**Достаточные условия возрастания.** Если функция  $f$  непрерывна на промежутке  $T$  и если ее производная неотрицательна (положительна) всюду на этом промежутке, за исключением, быть может, конечного множества точек, то функция  $f$  возрастает (строго возрастает) на этом промежутке.

#### 2. Достаточные признаки локального экстремума.

I. Если у точки  $p$  имеется такая окрестность  $]a < b[$ , что функция  $f$  непрерывна на  $]a < b[$ ,  $f'(t) < 0 \forall t \in ]a, p[$  и  $f'(t) > 0 \forall t \in ]p, b[$ , то  $p$  есть точка строгого локального минимума функции  $f$ .

Иллюстрация:  $f(x) = \sin |x|$ ,  $p = 0$ .

II. Если  $f'(p) = 0$ , а  $f''(p) > 0$ , то  $p$  является точкой строгого локального минимума функции  $f$ .

**Упражнение.** Сформулировать и доказать аналогичные дифференциальные признаки убывания, а также достаточные признаки строгого локального максимума.

#### 3. Выпуклые функции.

Пусть  $E$  — какое-нибудь векторное пространство (например,  $\mathbb{R}^2$ .) Множество  $M \subset E$  называют выпуклым, если оно вместе с любой парой своих точек  $p, q$  содержит отрезок  $[p, q]$ , их соединяющий.

$([p, q] := \{x = p + t(q - p) : t \in [0, 1]\} = \{x = \tau_1 p + \tau_2 q : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}_+, \tau_1 + \tau_2 = 1\}.)$

*Выпуклой комбинацией* точек  $p_1, \dots, p_k \in E$  называют всякую точку вида  $\tau_1 p_1 + \dots + \tau_k p_k$ , где  $\tau_1, \dots, \tau_k$  — такие неотрицательные числа, что  $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$ .

**Физическая интерпретация.** Пару  $(p, m)$ , где  $p \in E$ ,  $m \in \mathbb{R}_+$  назовем массивной точкой. Баривентром (центром масс) системы массивных

точек  $(p_1, m_1), \dots, (p_k, m_k)$  называют точку  $p := \frac{m_1 p_1 + \dots + m_k p_k}{m_1 + \dots + m_k}$ , т. е. выпуклую комбинацию  $\tau_1 p_1 + \dots + \tau_k p_k$ , где  $\tau_j = m_j / m$ ,  $m = m_1 + \dots + m_k$ .

**Барицентрический критерий выпуклости.** Множество  $M \subset E$  выпукло в том и только в том случае, когда каждая выпуклая комбинация любой конечной системы его точек является точкой этого множества (барицентрическое условие).

◀ Достаточность б.у. является прямым следствием определения выпуклости.

Допустим, что  $M$  выпукло и что б.у. выполняется для любых  $k \geq 2$  точек  $M$ . Пусть  $p_1, \dots, p_{k+1} \in M$  и  $\tau_1, \dots, \tau_{k+1}$  — положительные числа, сумма которых равна 1. Пусть  $p$  — барицентр системы массивных точек  $(p_1, \tau_1), \dots, (p_k, \tau_k)$  и  $\tau = \sum_{i \leq k} \tau_i$ . Тогда  $\sum_{i \leq k+1} \tau_i p_i = \tau p + \tau_{k+1} p_{k+1} \in M$ , ибо  $p, p_{k+1} \in M$  и  $\tau + \tau_{k+1} = 1$ . ▶

Функцию  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  называют *выпуклой*, если множество  $H_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in T, y \geq f(x)\} :=$  (надграфик функции  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ ) является выпуклым подмножеством плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Функцию  $f$  называют выпуклой вверх на промежутке  $T$ , если на этом промежутке функция  $-f$  выпукла.

**Неравенство Иенсена.** Функция  $f$  выпукла на промежутке  $T$  в том и лишь в том случае, когда

$$f(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_k x_k) \leq \tau_1 f(x_1) + \dots + \tau_k f(x_k)$$

для любых точек  $x_1, \dots, x_k \in T$  и таких неотрицательных чисел  $\tau_1, \dots, \tau_k$ , что  $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$ .

◀ Допустим, что  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция. Если  $x_1, \dots, x_k \in T$ , то точки  $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_k, f(x_k))$  принадлежат надграфу  $H_f$ , являющемуся выпуклым множеством, поэтому всякая выпуклая комбинация  $\sum \tau_i (x_i, f(x_i)) = (\sum \tau_i x_i, \sum \tau_i f(x_i)) =: (x, y)$  этих точек принадлежит множеству  $H_f$ . Это означает, что  $f(x) \leq y$ , т. е.  $f(\sum \tau_i x_i) \leq \sum \tau_i f(x_i)$ .

Предположим теперь, что для функции  $f$  выполняется неравенство Иенсена. Пусть  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  — точки множества  $H_f$ , т. е. такие точки, что  $f(x_i) \leq y_i$ , и пусть  $(x, y) = \sum \tau_i (x_i, y_i)$ , где  $\tau_1, \dots, \tau_k$  — такие неотрицательные числа, что  $\sum \tau_i = 1$ . Тогда

$$f(x) = f(\sum \tau_i x_i) \leq \sum \tau_i f(x_i) \leq \sum \tau_i y_i = y.$$

Следовательно,  $(x, y) \in H_f$ , т. е. множество  $H_f$  выпукло. ▶

**Дифференциальные признаки выпуклости.** 1. Если функция  $f$  дифференцируема на промежутке  $T$  и ее производная возрастает

на этом промежутке, то функция  $f$  выпукла на  $T$ .

2. Если функция  $f$  дважды дифференцируема на промежутке  $T$  и ее вторая производная неотрицательна на этом промежутке, то функция  $f$  выпукла на  $T$ .

◀ 1. Пусть  $(a, y)$  и  $(b, z)$  — какие-либо точки надграфика функции  $f$ , т. е. такие точки, что  $f(a) \leq y$ ,  $f(b) \leq z$ . Пусть  $a < b$  и  $l(t) := y + \frac{z-y}{b-a}(t-a)$  — функция, чей график есть прямая, проходящая через точки  $(a, y)$  и  $(b, z)$ . Наша цель — показать, что отрезок, соединяющий рассматриваемые точки, лежит выше графика функции  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , т. е. что  $f(t) \leq l(t)$  при любом  $t \in [a, b]$ . Для этого достаточно установить, что функция  $g := f - l$  неположительна на отрезке  $[a, b]$ .

Так как  $f(a) \leq y = l(a)$  и  $f(b) \leq z = l(b)$ , то  $g(a) \leq 0$  и  $g(b) \leq 0$ . Допустим, что на нашем отрезке есть точка  $p$ , где  $g(p) > 0$ . В этом случае  $g|_a^p > 0$  не может быть отрицательной. Стало быть, на  $[a, p]$  имеется такая точка  $c$ , что  $Dg(c) > 0$  (теорема Лагранжа). Поэтому  $Dg(t) > 0 \forall t \in [p, b]$ , ибо функция  $Dg$  возрастающая. Следовательно,  $g(b) \leq g(p) > 0$  в то время, как  $g(b) \leq 0$ . Абсурд.

2. Этот признак является простым следствием предыдущего. ▶

**Неравенство Юнга.**

$$a_1^{\tau_1} \cdots a_k^{\tau_k} \leq \tau_1 a_1 + \dots + \tau_k a_k$$

для любых положительных чисел  $a_1, \dots, a_k, \tau_1, \dots, \tau_k$  таких, что  $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$ . В частности,

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{1}{k} (a_1 + \dots + a_k)$$

(неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим).

◀ Функция  $e^x$  выпуклая. Поэтому в силу неравенства Йенсена имеем

$$\begin{aligned} a_1^{\tau_1} \cdots a_k^{\tau_k} &= e^{\tau_1 \ln a_1} \cdots e^{\tau_k \ln a_k} = e^{\tau_1 \ln a_1 + \dots + \tau_k \ln a_k} \leq \\ &\leq \tau_1 e^{\ln a_1} + \dots + \tau_k e^{\ln a_k} = \tau_1 a_1 + \dots + \tau_k a_k. \end{aligned}$$

**Упражнения.** Пусть  $f$  — функция, выпуклая на интервале  $T$ .

1. Функция  $f$  непрерывна на интервале  $T$ .  
2. В каждой точке интервала  $T$  функция  $f$  обладает односторонними производными.

3. На  $T$  функции  $D_- f$  и  $D_+ f$  возрастают, причём  $D_- f \leq D_+ f$ .

◀ Ниже рассматриваются лишь точки интервала  $T = ]a < b[$ .

Для каждой пары различных точек  $p, q$  положим  $k_{p,q} := \frac{f(q)-f(p)}{q-p}$  и  $l_{p,q}(t) := f(p) + k_{p,q}(t-p)$ . График функции  $l_{p,q}(t)$  есть прямая, проходящая через точки  $(p, f(p))$  и  $(q, f(q))$ , а  $k_{p,q}$  (угловой коэффициент этой прямой) = (средняя скорость функции  $f$  на участке  $[p, q]$ ) =  $Dl_{p,q}$ .

1. Для любых  $x$  и  $y$  имеем  $f(t) \leq l_{x,y}(t)$  на  $[x, y]$  и  $f(t) \geq l_{x,y}(t)$  вне  $[x, y]$ .

Пусть  $x < y < z$  — произвольные точки интервала  $T$ .

2.  $f(t) \in [l_{x,y}(t), l_{y,z}(t)]$  на  $[x, z]$ .

Поэтому функция  $f$  непрерывна в каждой точке  $y \in T$  согласно ТНПФ.

3.  $k_{x,y} \leq k_{x,z} \leq k_{y,z}$ .

4. Функции  $k_{x,y}$  и  $k_{y,z}$  переменной  $y$  возрастают на интервалах  $]x < b[$ , и  $]a < z[$ , соответственно.

5. Существуют  $\lim_{y \nearrow z} k_{y,z} = D_-f(z)$  и  $\lim_{y \searrow x} k_{x,y} = D_+f(x)$ , причём

6.  $D_+f(x) \leq k_{x,z} \leq D_-f(z)$ , если  $x < z$ .

7.  $k_{x,y} \leq k_{y,z} \Rightarrow D_-f(y) \leq k_{y,z} \leq D_+f(y) \Rightarrow D_-f(y) \leq D_+f(y)$ .

В итоге: если  $x < z$ , то  $D_-f(x) \leq D_+f(x) \leq D_-f(z) \leq D_+f(z)$ . ►

**4. Правило Лопиталья.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы на полуинтервале  $T = [a, b[ \subset \mathbb{R}$  и если:

1) либо  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b|T} 0$  и  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b|T} 0$ , либо  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b|T} \infty$ ;

2)  $\frac{Df(x)}{Dg(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b|T} c$  и  $Dg \neq 0$ ,

то  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b|T} c$ .

◀ Так как  $Dg \neq 0$  на промежутке  $T$ , то отображение  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  инъективно в силу теоремы Ролля. Согласно признаку Больцано отображение  $g$  строго монотонно и поэтому знак  $Dg$  постоянен на  $T$ . Для определённости будем предполагать, что  $Dg > 0$  и что  $a < b$ , а под знаком  $\rightarrow$  всюду незримо присутствует приписка  $x \nearrow b$ .

А) Предположим, что  $f(x) \rightarrow 0$  и  $g(x) \rightarrow 0$ . Положим  $f(b) = g(b) = 0$ . Теперь функции  $f$  и  $g$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы на интервале  $]a, b[$ .

$a_0$ ) Допустим, что  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$ . Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  найдётся такая точка  $p \in [a, b]$ , что  $|Df(t)| < \varepsilon Dg(t) \forall t \in [p, b]$ . Поэтому согласно теореме о приращениях для всякого  $x \in ]p, b[$  будем иметь  $|f(x)| = |f|_x^b| < < |\varepsilon g|_x^b| = \varepsilon |g(x)|$ . Итак,

$\forall \varepsilon > 0 \exists p \in [p < b[ \mid \forall x \in ]p, b[ \mid |f(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow \frac{f}{g} \rightarrow 0$ .

$a_1$ ) Если  $\frac{Df}{Dg} \rightarrow c < \infty$ , то  $\frac{Df - cDg}{Dg} \rightarrow 0$ . Поэтому согласно варианту

$a_0$ ) правила Лопитала  $\frac{f-cg}{g} \rightarrow 0$ .

$a_2$ ) Если  $\frac{Df}{Dg} \rightarrow \infty$ , то существует такая точка  $z \in T$ , что  $Df > Dg > 0$  на  $[z, b]$ . Поэтому  $\frac{g}{f} \rightarrow 0$  согласно варианту  $a_0$ ) правила Лопитала, и, стало быть,  $\frac{f}{g} \rightarrow \infty$ .

В) Допустим теперь, что  $g(x) \rightarrow \infty$ .

$b_0$ ) Предположим, что  $\frac{Df}{Dg} \rightarrow 0$ . В этом случае для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такая точка  $p \in T$ , что для любого  $t \in [p, b]$  выполнено неравенство  $|df(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} Dg(t)$  и потому в силу теоремы о приращениях для каждого  $x \in [p, b]$  будем иметь:  $|f(x)| = |f(p) + f|_p^x| \leq |f(p)| + |f|_p^x| \leq |f(p)| + \frac{\varepsilon}{2} g|_a^x = |f(p)| - \frac{\varepsilon}{2} g(p) + \frac{\varepsilon}{2} g(x)$ . Поскольку  $g \rightarrow \infty$ , то на интервале  $[p, b]$  отыщется такая точка  $q$ , что  $\frac{\varepsilon}{2} g(x) \geq |f(p)| - \frac{\varepsilon}{2} g(p)$  для всякого  $x \in [q, b]$ . Сопоставляя полученные неравенства, видим, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists q \in [p, b] \forall x \in [q, b] |f(x)| < \varepsilon |g(x)| \Rightarrow \frac{f}{g} \rightarrow 0$ .

Случаи  $\frac{f}{g} \rightarrow c \in ]0, \infty[$  и  $\frac{f}{g} \rightarrow \infty$  исследуются как и в ситуации А).



## § 4.2. Многократная дифференцируемость

Для каждой функции  $f$  и для любого натурального числа  $k$  определим  $k$ -ю производную  $D^k f$  следующим образом:

$$D^0 f := f, D^1 f := D(D^0 f), \dots, D^k f := D(D^{k-1} f).$$

Будем говорить, что функция  $f$  дифференцируема один раз в точке  $p$ , если она дифференцируема в этой точке. При  $k \geq 2$  будем говорить, что функция  $f$  дифференцируема  $k$  раз в точке  $p$  и писать  $f \in \mathcal{D}^k(p)$ , если она дифференцируема в некоторой окрестности точки  $p$ , а ее производная  $Df$  дифференцируема  $k-1$  раз в точке  $p$ . Если  $f \in \mathcal{D}^k(p) \forall k \in \mathbb{N}$ , то будем говорить, что функция  $f$  бесконечно дифференцируема в точке  $p$ , и писать  $f \in \mathcal{D}^\infty(p)$ . Если же  $f \in \mathcal{D}^k(x)$  для каждого  $x \in M$ , то будем писать  $f \in \mathcal{D}^k(M)$  и говорить "функция  $f$  дифференцируема  $k$  раз на множестве  $M$ ".

**Упражнения.** 1.  $\mathcal{D}^1(X) \supset \mathcal{D}^2(X) \supset \dots \supset \mathcal{D}^\infty(X) = \bigcap_{k>0} \mathcal{D}^k(X)$ .

2.  $f \in \mathcal{D}^k(p) \Leftrightarrow D^{k-1} f \in \mathcal{D}(p)$ . Здесь  $k \geq 2$ .

3. Если функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы  $k$  раз в точке  $p$ , то функции  $f + g$  и  $f \cdot g$  также дифференцируемы  $k$  раз в точке  $p$  и

$$a) D^k(f + g)(p) = D^k f(p) + D^k g(p),$$

$$b) D^k(f \cdot g)(p) = \sum_{i=0}^k C_k^i D^i f(p) D^{k-i} g(p) \quad (\text{формула Лейбница}).$$

4. Многократная дифференцируемость является локальным понятием: если функции  $f$  и  $g$  совпадают в некоторой окрестности точки  $p$  и  $g \in \mathcal{D}^k(p)$ , то  $f \in \mathcal{D}^k(p)$  и  $D^k f(p) = D^k g(p)$ .

**Признак многократной дифференцируемости композиции.** Если  $f \in \mathcal{D}^k(p)$ , а  $g \in \mathcal{D}^k(f(p))$ , то  $g \circ f \in \mathcal{D}^k(p)$ .

◀ Согласно правилу дифференцирования композиции, для  $k = 1$  теорема справедлива. Предположим теперь, что рассматриваемая теорема верна для некоторого натурального  $k \geq 1$ . Пусть  $f \in \mathcal{D}^{k+1}(p)$  и  $g \in \mathcal{D}^{k+1}(f(p))$ . В этом случае функции  $Df$  и  $Dg$  дифференцируемы в точках  $p$  и  $f(p)$  соответственно. Поэтому множества  $\text{Dom } Df$  и  $\text{Dom } Dg$  являются окрестностями этих точек. Так как функция  $f$  непрерывна в точке  $p$ , то существует такая окрестность  $U$  точки  $p$ , что для каждого  $x \in U \cap \text{Dom } f$   $f(x) \in \text{Dom } Dg$ . Пусть  $V := U \cap \text{Dom } Df$ . Если  $x \in V$ , то  $f \in \mathcal{D}(x)$  и  $g \in \mathcal{D}(f(x))$ . Следовательно, согласно правилу дифференцирования композиции в любой точке  $x \in V$  функция  $g \circ f$  дифференцируема и справедлива формула

$$D(g \circ f)|_x = Dg(f(x)) \cdot Df(x) = (((Dg) \circ f) \cdot Df)|_x. \quad (*)$$

Поскольку  $f, Df \in \mathcal{D}^k(p)$ , а  $Dg \in \mathcal{D}^k(f(p))$ , то согласно индуктивному предположению  $(Dg) \circ f \in \mathcal{D}^k(p)$  и, следовательно, функция  $((Dg) \circ f) \cdot Df$  дифференцируема  $k$  раз в точке  $p$ , будучи произведением функций класса  $\mathcal{D}^k(p)$ .

Согласно формуле (\*) функции  $D(g \circ f)$  и  $((Dg) \circ f) \cdot Df$  совпадают на окрестности  $V$  точки  $p$  и потому  $D(g \circ f) \in \mathcal{D}^k(p)$  и, значит,  $g \circ f \in \mathcal{D}^{k+1}(p)$ .

Согласно принципу математической индукции рассматриваемая теорема верна для каждого натурального  $k \geq 1$ , а, следовательно, и для  $k = \infty$ . ▶

**Признак многократной дифференцируемости обратной функции.** Пусть  $f$  и  $g$  — такие взаимно обратные отображения, что  $f \in \mathcal{D}^k(p)$ ,  $Df(p) \neq 0$ , причём  $k \geq 2$ . Тогда  $g \in \mathcal{D}^k(q = f(p))$ .

◀ Допустим, что  $Df(p) > 0$ . Так как  $k \geq 2$ , то функция  $Df$  непрерывна в точке  $p$  и, стало быть,  $Df > 0$  на некотором интервале  $T$ , содержащем  $p$ . Следовательно, функция  $f$  непрерывна и строго возрастает на  $T$ . Поэтому функция  $g$  непрерывна на интервале  $X := f(T)$  согласно теореме об обратной функции. Вспоминая правило дифференцирования обратной функции, заключаем, что в любой точке  $x \in X$  функция



$g$  дифференцируема и что  $Dg(x) = (Df(g(x)))^{-1}$ , иначе

$$\forall x \in X \quad Dg|_x = \omega \circ (Df \circ g)|_x,$$

где  $\omega : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  — отображение, задаваемое формулой  $\omega(z) = z^{-1}$ .

Предположим, что при некотором  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  функция  $g$  дифференцируема  $i$  раз в точке  $q = f(p)$ . Поскольку  $Df \in \mathcal{D}^i(g(q))$  и  $\omega \in \mathcal{D}^i(Df(p))$ , то согласно признаку многократной дифференцируемости композиции функция  $\omega \circ (Df \circ g)$  дифференцируема  $i$  раз в точке  $q$ . Так как функции  $Dg$  и  $\omega \circ Df \circ g$  совпадают на интервале  $X \in \mathcal{N}(q)$ , то  $Dg \in \mathcal{D}^i(q)$  и, следовательно,  $g \in \mathcal{D}^{i+1}(q)$ . Отсюда по индукции заключаем, что  $g \in \mathcal{D}^i(q)$  для каждого  $i \in \{1, \dots, k\}$ .

Итак, теорема справедлива для каждого натурального числа  $k \geq 2$ , а, стало быть, и для  $k = \infty$ . ►

### § 4.3. Локальная аппроксимация функций полиномами

**Лемма о степенной оценке приращения.** Если функция  $g$  непрерывна на отрезке  $[p, q]$  и для любого  $t \in ]p, q[$  выполнено неравенство  $|Dg(t)| \leq c|t - p|^s$ , где  $s > -1$ , то  $|g|_p^t| \leq \frac{c}{s+1}|t - p|^{s+1}$  при любом  $t \in [p, q]$ .

◀ Пусть  $h(x) := \frac{c}{s+1}|x - p|^{s+1} \text{sign}(q - p)$ . Функция  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, причём  $Dh(x) = c|x - p|^s$  в любой точке  $x \in \mathbb{R} \setminus p$ . Согласно теореме о приращениях для всякого  $t \in [p, q]$   $|g|_p^t| \leq |h|_p^t|$ . ►

**Теорема о тейлоровом разложении.** Если  $f \in \mathcal{D}^k(p)$ , то имеется, и к тому же лишь один, полином  $A(x - p) = a_0 + \dots + a_k(x - p)^k$  степени, не большей  $k$ , такой, что

$$f(x) = A(x - p) + \varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k).$$

В этом случае  $a_j = \frac{D^j f(p)}{j!} \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}$ .

◀ 1. Если полином  $C(z) = \sum_{i \geq 0} c_i z^i \underset{z \rightarrow 0}{=} o(z^k)$ , то  $c_0 = \dots = c_k = 0$ .

◁ Допустим, что  $c_i = 0 \quad \forall i < j \leq k$ . Тогда  $c_j z^j = C(z) - \sum_{i > j} c_i z^i \underset{z \rightarrow 0}{=} o(z^j)$ . Следовательно,  $c_j = 0 \quad \forall j \leq k$ . ▷

2. Если функция  $\varphi$  такова, что  $D^0 \varphi(p) = \dots = D^k \varphi(p) = 0$ , где  $k \geq 1$ , то  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k)$ .

◁ Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $D^{k-1} \varphi(p) = 0$  и  $D(D^{k-1} \varphi)(p) = 0$ , то  $D^{k-1} \varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x - p|)$  (лейбницево разложение функции  $D^{k-1} \varphi$ ). По-

этому найдется такой интервал  $T$ , что  $|D^{k-1}\varphi(t)| \leq \varepsilon|t-p|^1$  для каждого  $t \in T$ .

Отсюда, последовательно применяя лемму о степенной оценке приращения к любому отрезку  $[p, x] \subset T$ , получаем неравенство  $|D^0\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{k!}|x-p|^k$ , справедливое для каждого  $x \in [a, b]$ . Тем самым  $\varphi(x) = D^0\varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ .  $\triangleright$

3. Если  $\varphi(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$ , то  $D^j\varphi(p) = 0 \forall j \in \{0, \dots, k\}$ .

$\triangleleft$  Это устанавливается простым вычислением производных.  $\triangleright$

Из п. 1 следует единственность искомого полинома, а пп. 2 и 3 доказывают его существование и указывают его вид.  $\blacktriangleright$

Полином  $\sum_{j=0}^k \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$  называют  $k$ -м *полиномом Тейлора функции*  $f(x)$  в точке  $p$ , а последовательность функций  $\tau_j(x) := \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$  — *рядом Тейлора функции*  $f$  в точке  $p$ . Если  $f \notin \mathcal{D}^\infty(p)$ , то в точке  $p$  ряд Тейлора функции  $f$  конечен.

**Упражнение.** Найти ряд Тейлора в точке 0 каждой из пяти следующих функций:

$$\exp x, \ln(1+x), (1+x)^s, \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1+x^2}.$$

**Лагранжева оценка остатка разложения Тейлора.** Если функция  $f$  дифференцируема  $k+1$  раз на отрезке  $[p, x]$  и  $|D^{k+1}f(t)| \leq c$  при любом  $t \in [p, x]$ , то

$$|f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j| \leq \frac{c}{(k+1)!}|x-p|^{k+1}.$$

$\blacktriangleleft$  Пусть  $g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(p)}{j!}(x-p)^j$ . Тогда  $D^0g(p) = \dots = D^k g(p) = 0$  и  $|D^{k+1}g(t)| = |D^{k+1}f(t)| \leq c$ .

Отсюда, применяя последовательно лемму о степенной оценке приращения к функции  $g$ , получаем нужное неравенство:

$$|g(x)| \leq \frac{c}{(k+1)!}|x-p|^{k+1}. \blacktriangleright$$

Если  $f$  и  $g$  совпадают в точке  $p$  и  $f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x-p)^k)$ , то говорят, что *порядок касания функций*  $f$  и  $g$  в точке  $p$  не меньше  $k$ .

Таким образом, порядок касания  $k$  раз дифференцируемой в точке  $p$  функции и ее  $k$ -го полинома Тейлора в этой точке не меньше  $k$ .

**Упражнения.** 1. Пусть порядок касания функции  $f$  и полинома  $\sum_{n \geq 0} a_n(x-p)^n$  не меньше  $k$ . Тогда:

- а) если  $k \geq 0$ , то функция  $f$  непрерывна в точке  $p$  и  $f(p) = a_0$ ;
- б) если  $k \geq 1$ , то  $f \in \mathcal{D}(p)$  и  $Df(p) = a_1$ .

2. Пусть  $f(x) = x^8 \sin x^{-8}$ ,  $f(0) = 0$ . Каков порядок касания функции  $f$  и функции  $0$  в точке  $0 \in \mathbb{R}$ ? Сколько раз функция  $f$  дифференцируема в точке  $0$ ?

### Приложения

**1. Анализ локального поведения функций.** Пусть порядок касания функции  $f(x)$  и полинома  $a + b(x-p) + c(x-p)^k$  не меньше  $k$ , причем  $c \neq 0$ ,  $k \geq 2$ . Тогда над некоторой окрестностью  $U$  точки  $p$  взаимное расположение графика функции  $f$  и его касательной в точке  $(p, f(p)) \in \mathbb{R}^2$  такое же, как у графика функции  $g(x) = c(x-p)^k$  и оси абсцисс, т. е.

$$\text{sign}(f(x) - (a + b(x-p))) = \text{sign}(c(x-p)^k).$$

◀ В рассматриваемом случае  $f \in \mathcal{D}(p)$ ,  $f(p) = a$ ,  $Df(p) = b$ . Поэтому касательная к графику этой функции в точке  $(p, f(p))$  является графиком функции  $l(x) := a + b(x-p)$ . Пусть  $\varphi(x) := f(x) - (a + b(x-p) + c(x-p)^k)$ . Тогда  $\text{sign}(f(x) - l(x)) = \text{sign}(c(x-p)^k + \varphi(x))$ . Так как  $\varphi(x) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x-p|^k)$ , то у точки  $p$  имеется такая окрестность  $U$ , что для каждого  $x \in U$   $|\varphi(x)| < |c||x-p|^k$  и, следовательно,  $\text{sign}(c(x-p)^k + \varphi(x)) = \text{sign } c(x-p)^k$ . ▶

**Следствие.** Пусть функция  $f$  такова, что

$$D^1 f(p) = \dots = D^{k-1} f(p) = 0, \quad D^k f(p) > 0.$$

Тогда, если  $k$  чётно, то  $p$  — точка строгого локального минимума функции  $f$ , а если  $k$  нечётно, то

$$f(x) \underset{x \nearrow p}{<} f(p), \quad f(x) \underset{x \searrow p}{>} f(p).$$

### 2. Знаменитые разложения в степенные ряды:

$$(1) e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$(2) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$(3) \sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \quad \forall y \in \mathbb{R};$$

$$(4) \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots \quad \forall t \in [-1, 1];$$

$$(5) \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \quad \forall t \in ]-1, 1[$$

(формула Н.Меркатора).

Ньютоново разложение бинома

$$(1+z)^s = 1 + sz + \frac{s(s-1)}{2!}z^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}z^3 + \dots \quad \forall z \in ]-1, 1[$$

будет установлено в следующей главе.

◀ (1) Для вещественных  $z$  — это следствие равенства  $e^z = \exp z$  (§ 3.3). Для комплексных — определение.

(2) Поскольку  $|D^n \cos x| \leq 1$ , то ввиду лагранжевой оценки остатка разложения Тейлора

$$\left| \cos x - \sum_{n=0}^k \frac{D^n \cos(0)}{n!} x^n \right| \leq \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Остается вспомнить определение суммы ряда.

(3) устанавливается аналогично предыдущему.

4) Пусть  $g(t) := \arctan t - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ . Тогда

$$|Dg(t)| = \left| \frac{1}{1+t^2} - \sum_{n=0}^k (-t^2)^n \right| = \left| \frac{1}{1+t^2} - \frac{1 - (-t^2)^{k+1}}{1+t^2} \right| = \frac{t^{2k+2}}{1+t^2} \leq t^{2k+2}.$$

Отсюда, опираясь на лемму о степенной оценке приращения, получаем

$$|g(t)| \leq \frac{|t|^{2k+3}}{2k+3} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall t \in [-1, 1].$$

(5) Для каждого  $t > -1$  положим  $g(t) := \ln(1+t) - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ .

Тогда

$$|Dg(t)| = \left| \frac{1}{1+t} - \sum_{n=0}^k (-t)^n \right| = \frac{|t|^{k+1}}{1+t}.$$

Отметим какую-нибудь точку  $u > -1$ . Тогда для каждого  $t > u$  справедливо неравенство  $|Dg(t)| \leq \frac{|t|^{k+1}}{1+u}$ . Отсюда, опираясь на лемму о степенной оценке приращения, заключаем, что

$$|g(t)| \leq \frac{|t|^{k+2}}{(k+2)(1+u)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall t \in [u, 1].$$

Поскольку  $u$  — произвольная точка интервала  $] - 1, 0[$ , то  $|g(t)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \forall t \in [-1, 1]$ . ►

**Формула Эйлера.**  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

◀ Пусть  $z_n := \frac{(it)^n}{n!}$ ,

$$c_n = \begin{cases} z_n, & n \in 2\mathbb{N} \\ 0, & n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}, \quad s_n = \begin{cases} 0, & n \in 2\mathbb{N} \\ z_n, & n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (c_n + s_n) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n = \cos t + i \sin t. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**3. Метод Мэчина аппроксимации числа  $\pi$ .** Следствием равенства (4) является следующая красивая формула:

$$\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - \dots).$$

Однако, чтобы с помощью этой формулы найти три знака после запятой в десятичном представлении числа  $\pi$ , нужно просуммировать около двух тысяч членов указанного ряда, поскольку  $\pi$  находится где-то на отрезке  $[s_k, s_{k+1}]$ ,  $s_k := 4 \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

Несравненно более эффективный способ даст **формула Мэчина**

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

и оценка

$$\left| \arctan t - \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right| \leq \frac{|t|^{2k+3}}{2k+3}.$$

$$\text{Например, } \left| \pi - 16 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5^6} \right) + \frac{4}{239} \right| \leq 3 \cdot 10^{-5}.$$

Для получения формулы Мэчина надо проверить, что

$$\tan(\pi/4 - 4 \arctan 1/5) = -1/239.$$

Первоначальный опыт приводит к следующей гипотезе: если функция  $f$  бесконечно дифференцируема в точке  $p$ , то в некоторой окрестности этой точки она равна сумме своего ряда Тейлора. Однако исследование функции  $f(x) = \exp(-x^{-2})$ ,  $f(0) = 0$  опровергает эту гипотезу:

эта функция бесконечно дифференцируема, а ее ряд Тейлора в точке  $0 \in \mathbb{R}$  нулевой.

**Операции над полиномиальными разложениями.**

**0. Ряд Тейлора производной.**  $j$ -тый член ряда Тейлора производной функции  $f$  равен производной  $j + 1$ -того члена ряда Тейлора этой функции:

$$\frac{D^j Df(p)}{j!} (x - p)^j = D \left( \frac{D^{j+1} f(p)}{(j+1)!} (x - p)^{j+1} \right).$$

**1.** Если в точке  $p$  порядок касания функции  $f(x)$ , дифференцируемой  $k$  раз в этой точке, и полинома  $A(x - p) = \sum_{j \geq 0} a_j (x - p)^j$  не меньше

$k$ , то  $a_j = \frac{D^j f(p)}{j!}$  при  $j \in \{0, \dots, k\}$ , т. е.  $k$ -й полином Тейлора функции  $f$  в точке  $p$  можно получить из полинома  $A$ , вычеркнув все его слагаемые степени, большей  $k$ .

**2. Полиномиальные разложения суммы и произведения.**

Если функции  $f, g$  и полиномы  $A, B$  таковы, что  $f(x) - A(x - p) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k)$  и  $g(x) - B(x - p) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k)$ , то

$$(f(x) + g(x)) - (A(x - p) + B(x - p)) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k),$$

$$(f(x) \cdot g(x)) - (A(x - p) \cdot B(x - p)) \underset{x \rightarrow p}{=} o((x - p)^k).$$

**3. Полиномиальное разложение композиции.** Если порядок касания функции  $f(x)$  и полинома  $A(x - p)$  в точке  $p$  не меньше  $k \geq 1$ , а порядок касания функции  $g(y)$  и полинома  $B(y - q)$  в точке  $q = f(p)$  также не меньше  $k$ , то

$$g(f(x)) - B(A(x - p) - q) \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x - p|^k).$$

◀ Из предпосылок теоремы и леммы об "о-малое" вытекает, что функции  $f$  и  $g$  представимы в виде  $f(x) = A(x - p) + \alpha(x)|x - p|^k$ ,  $g(y) = B(y - q) + \beta(y)|y - q|^k$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(y)$  — функции, непрерывные в точках  $p$  и  $q$ , соответственно, и равные нулю в этих точках. Отсюда  $g(f(x)) - B(A(x - p) - q) = B(f(x) - f(p)) + \beta(f(x))(f(x) - f(p))^k - B(A(x - p) - f(p)) = \{B(y_0(x)) - B(y_1(x))\} + \{\beta(f(x))(f(x) - f(p))^k\}$ , где  $y_0(x) := f(x) - f(p)$ ,  $y_1(x) := A(x - p) - f(p)$ .

Нам достаточно показать, что каждое слагаемое, обрамленное фигурными скобками, есть о-малое от  $|x - p|^k$  при  $x \rightarrow p$ .

1. Производная  $DB$  функции  $B$ , будучи полиномиальной функцией, непрерывна и потому, в силу теоремы Вейерштрасса об экстремумах, найдется такая константа  $c$ , что  $|DB(y)| \leq c$  при любом  $y \in Y := [-1, 1]$ . Согласно теореме о приращениях, для каждой пары точек  $y_0, y_1 \in Y$  справедливо неравенство  $|B(y_0) - B(y_1)| \leq c|y_0 - y_1|$ . Поскольку функции  $y_0(x)$  и  $y_1(x)$  непрерывны в точке  $p$ , то у этой точки имеется такая окрестность  $X$ , что при любом  $x \in X$   $y_0(x), y_1(x) \in Y$ , и, следовательно,

$$|B(y_0(x)) - B(y_1(x))| \leq c|y_0(x) - y_1(x)| = c|\alpha(x)|x - p|^k \underset{x \rightarrow p}{=} o(|x - p|^k),$$

ибо функция  $\alpha$  непрерывна в точке  $p$  и  $\alpha(p) = 0$ .

2. Так как порядок касания функции  $f$  и полинома  $A$  в точке  $p$  не меньше  $k \geq 1$ , то функция  $f$  дифференцируема в этой точке и потому

$$\frac{\beta(f(x))|f(x) - f(p)|^k}{|x - p|^k} = \beta(f(x)) \left| \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \right|^k \underset{x \rightarrow p}{\rightarrow} 0 \cdot |Df(p)|^k = 0. \blacktriangleright$$

**Следствие.** Если в условиях предыдущей теоремы  $f(x)$  и  $g(y)$  взаимно обратные функции, то

$$B(A(x-p)-q) = p+(x-p)+o(|x-p|^k), \quad A(B(y-q)-p) = q+(y-q)+o(|y-q|^k).$$

**Упражнения.** 1. Какой ряд Тейлора в точке 0 у функций  $\arctan t$ ,  $(1-t)^{-2}$  и  $((t+1)(t+2))^{-1}$ ?

2. Найти шестой полином Тейлора в точке 0 каждой из четырех следующих функций:

$$\tan x, \arcsin x, \arccos x, \frac{1}{\cos x}.$$

#### § 4.4. Некоторые обобщения

1. Будем говорить, что функция  $f$  обращается в ноль в точке  $p$  не менее  $k$  раз, если  $D^0 f(p) = \dots = D^{k-1} f(p) = 0$ . К тому же будем считать, что всякая функция в любой точке обращается в ноль не менее чем 0 раз.

**Упражнения.** 0. Полином обращается в ноль не менее  $k$  раз в точке  $p$  тогда и только тогда, когда точка  $p$  является корнем этого полинома кратности не меньшей, чем  $k$ .

1. Функция  $f \in \mathcal{D}^k(p)$  обращается в ноль в точке  $p$  не менее  $k$  раз в том и только в том случае, когда она представима в виде  $f(x) = (x-p)^k g(x)$ , где  $g$  — функция непрерывная в точке  $p$ .

Говорят, что на промежутке  $T$  функция  $f$  обращается в ноль не менее  $k$  раз, если на этом промежутке имеются такие попарно различные

точки  $p_1, \dots, p_n$ , что функция  $f$  обращается в ноль в точке  $p_i$  не менее  $k_i$  раз, причём  $k_1 + \dots + k_n = k$ .

**Обобщенная теорема Ролля.** Если на промежутке  $T$  дифференцируемая функция  $f$  обращается в ноль не менее чем  $k + 1$  раз, то ее производная не менее  $k$  раз обращается в ноль на этом промежутке.

◀ Заметим сначала, что если функция  $f$  обращается в ноль не менее чем  $k + 1$  раз в точке  $p$ , то функция  $Df$  обращается в ноль в точке  $p$  не менее  $k$  раз.

Пусть теперь  $p_1 < \dots < p_n$  — такие точки промежутка  $T$  и  $k_1, \dots, k_n$  — такие положительные числа, что функция  $f$  обращается в ноль в точке  $p_i$  не менее  $k_i$  раз и  $k_1 + \dots + k_n = k + 1$ . Поскольку  $f(p_1) = \dots = f(p_n) = 0$ , то, согласно классической теореме Ролля, существуют такие точки  $t_1, \dots, t_{n-1}$ , что  $t_i \in ]p_i, p_{i+1}[$  и  $Df(t_i) = 0$ . Так как функция  $Df$  обращается в ноль в точке  $p_i$  не менее чем  $k_i - 1$  раз, то простой подсчет показывает, что функция  $Df$  обращается в ноль на промежутке  $T$  не менее  $k$  раз. ▶

**2.** Пусть  $p_1, \dots, p_n$  — попарно различные точки промежутка  $T$ ,  $k_1, \dots, k_n$  — положительные натуральные числа и  $k = k_1 + \dots + k_n$ .

Полином  $A(z) = a_0 + \dots + a_{k-1}z^{k-1}$  называют полиномом Лагранжа—Эрмита функции  $f$  относительно системы узлов интерполяции  $p_1, \dots, p_n$  и их кратностей  $k_1, \dots, k_n$ , если его степень не превосходит  $k - 1$  и

$$D^j A(p_i) = D^j f(p_i) \text{ для каждого } i \in \{1, \dots, n\} \text{ и любого } j \in \{0, \dots, k_i - 1\}.$$

Таким образом,  $k$ -й полином Тейлора функции  $f$  в точке  $p$  является полиномом Лагранжа—Эрмита этой функции относительно узла  $p$  кратности  $k + 1$ .

**Оценка дефекта интерполяции Лагранжа—Эрмита.** Пусть  $A$  — полином Лагранжа—Эрмита функции  $f$  относительно системы узлов интерполяции  $p_1, \dots, p_n$  и их кратностей  $k_1, \dots, k_n$ . Если функция  $f$  дифференцируема  $k$  раз на промежутке  $T$ , тогда для каждого  $x \in T$  справедливо неравенство

$$|f(x) - A(x)| \leq \frac{s}{k!} |(x - p_1)^{k_1} \dots (x - p_n)^{k_n}|,$$

где  $s = \sup\{|D^k f(t)| : t \in T\}$ .

Частным случаем этого неравенства является лагранжева оценка остатка разложения Тейлора.

◀ Если  $x$  — одна из точек  $p_1, \dots, p_n$ , то  $f(x) - A(x) = 0$ . Поэтому зафиксируем внимание на какой-либо точке  $x \in T \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  и рассмотрим функцию  $g_x(t)$  переменной  $t \in T$ , определяемую равенством



$g_x(t) = f(t) - A(t) - c_x Q(t)$ , где  $Q(t) := (t - p_1)^{k_1} \dots (t - p_n)^{k_n}$ , а  $c_x$  — константа, удовлетворяющая условию  $f(x) - A(x) - cQ(x) = 0$ .

Функция  $g_x$  обращается в ноль в каждой точке  $p_i$  не менее  $k_i$  раз и один раз в точке  $x$ . Следовательно, на промежутке  $T$  она обращается в нуль по крайней мере  $k + 1$  раз. Так как она дифференцируема  $k$  раз на промежутке  $T$ , то согласно обобщенной теореме Ролля на промежутке  $T$  найдется такая точка  $z$ , что  $D^k g_x(z) = 0$ . Поскольку степень полинома  $A$  не превосходит  $k - 1$ , а старший член полинома  $Q(t)$  равен  $t^k$ , то

$$0 = D^k g_x(z) = D^k f(z) - ck!$$

Откуда

$$c = \frac{D^k f(z)}{k!}.$$

Поэтому

$$|f(x) - A(x)| = |cQ(x)| = \frac{|D^k f(z)||Q(x)|}{k!} \leq \frac{s}{k!} |Q(x)|. \blacktriangleright$$

**Теорема об интерполяции Лагранжа—Эрмита.** Для каждой числовой таблицы  $b$  вида

$$\begin{array}{c} b_{1,0}, \dots, b_{1,k_1-1} \\ \dots \dots \dots \\ b_{n,0}, \dots, b_{n,k_n-1} \end{array}$$

существует, и притом лишь один, полином  $A(x) = a_0 \dots + a_{k-1} x^{k-1}$  степени меньшей  $k$  такой, что

$$D^j A(p_i) = b_{i,j} \text{ для каждого } i \in \{1, \dots, n\} \text{ и любого } j \in \{0, \dots, k_i - 1\}.$$

◀ Полином  $A$  окажется искомым в том и только в том случае, когда набор его коэффициентов  $a := (a_0, \dots, a_{k-1})$  будет решением следующей системы линейных уравнений

$$\sum_{l=0}^{k-1} a_l D^j x^l \Big|_{p_i} = b_{i,j}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{0, \dots, k_i - 1\}.$$

Поскольку эта система "квадратная", то она обладает, и притом лишь одним, решением тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система уравнений  $\sum a_l D^j x^l \Big|_{p_i} = 0$  имеет лишь нулевое решение.

Пусть  $(a_0, \dots, a_{k-1})$  — решение этой однородной системы. Тогда для полинома  $A(x) := a_0 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}$  выполнены следующие равенства

$$D^j A(p_i) = 0 \text{ для каждого } i \in \{1, \dots, n\} \text{ и любого } j \in \{0, \dots, k_i - 1\}.$$

Это означает, что  $A$  является полиномом Лагранжа—Эрмита нулевой функции относительно системы узлов  $p_1, \dots, p_n$  и их кратностей  $k_1, \dots, k_n$ . Поэтому согласно оценке дефекта интерполяции Лагранжа—Эрмита  $|A(x)| \leq 0$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$  и, следовательно, все коэффициенты полинома  $A$  равны нулю. ►

## Глава 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В этой главе при отсутствии специальных указаний слово "функция" считается синонимом фразы "отображение вида  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subset \mathbb{R}$ ", а площадь фигуры (множества)  $S$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  обозначается символом  $\mu(S)$ .

### Введение. Метод Ньютона вычисления площадей

Пусть  $f$  — неотрицательная непрерывная функция на отрезке  $T = [a < b] \subset \mathbb{R}$ . Для каждой пары точек  $p, t \in T$  положим  $M_f(p, t) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [p, t], y \in [0, f(x)]\}$ . Такие множества называют *криволинейными трапециями*.

**Лемма Ньютона.** Функция  $A(x) := \mu(M_f(a, x))$  непрерывна на отрезке  $T$ , а ее производная  $A'(p)$  равна  $f(p)$  в каждой внутренней точке  $p$  этого отрезка.

◄ Как и Ньютон, будем исходить из представлений о свойствах площади, сложившихся в начальном курсе планиметрии.

Для каждой пары точек  $p, t \in T$  положим

$$u(p, t) := \inf\{f(x) : x \in [p, t]\},$$

$$h(p, t) := \sup\{f(x) : x \in [p, t]\},$$

$$U(p, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [p, t], y \in [0, u(p, t)]\} \text{ (прямоугольник, вписанный в фигуру } M_f(p, t)),$$

$$H(p, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [p, t], y \in [0, h(p, t)]\} \text{ (прямоугольник, облегающий фигуру } M_f(p, t)).$$

Площади прямоугольников  $U(p, t)$  и  $H(p, t)$  равны  $u(p, t)|t - p|$  и  $h(p, t)|t - p|$  соответственно.

Площадь криволинейной трапеции  $M_f(p, t)$  равна  $(A(t) - A(p)) \operatorname{sign}(t - p)$ , поскольку для любой тройки точек  $x < y < z$  отрезка  $T$  имеет место равенство  $\mu M_f(x, z) = \mu M_f(x, y) + \mu M_f(y, z)$ .

Так как  $U(p, t) \subset M_f(p, t) \subset H(p, t)$ , то  $\mu U(p, t) \leq \mu M_f(p, t) \leq \mu H(p, t)$  и, следовательно,

$$u(p, t) \leq \frac{A(t) - A(p)}{t - p} \leq h(p, t).$$

Так как функция  $f$  непрерывна, то

$$\lim_{t \rightarrow p} u(p, t) = f(p) = \lim_{t \rightarrow p} h(p, t)$$

(лемма о непрерывности огибающих § 3.1). Следовательно,  $\frac{A(t) - A(p)}{t - p} \xrightarrow{x \rightarrow p} f(p)$ . (Почему?) Отсюда видно, что функция  $A$  непрерывна в любой точке  $p \in T$  и что она дифференцируема в каждой внутренней точке  $p$  этого отрезка, причем  $A'(p) = f(p)$ . ►

**Формула Ньютона.** Пусть  $F$  — какая-нибудь непрерывная на отрезке  $[a \leq b]$  функция, для которой  $F'(x) = f(x)$  при любом  $x \in ]a, b[$ . Тогда  $\mu M_f(a, b) = F|_a^b$ .

◄ Функция  $A - F$  непрерывна на рассматриваемом отрезке, а ее производная равна нулю в каждой его внутренней точке. Значит, эта функция постоянна на  $[a \leq b]$  и потому  $F|_a^b = A|_a^b = \mu M_f(a, b)$ . ►

**Пример**  $\mu M_{\sin}(0, \pi) = 2$ , поскольку  $\sin = -D \cos$ .

### § 5.1. Первообразная

Будем говорить, что функция  $F$  является *первообразной* (для) функции  $f$  на множестве  $U$ , если  $F'(x) = f(x)$  для каждого  $x \in U$ .

**Лемма о первообразных.** 1) Если  $F$  есть первообразная функции  $f$  на множестве  $U$ , то функция  $F + \text{const}$  также является первообразной для  $f$  на  $U$ .

2) Если  $F$  и  $G$  суть первообразные функции  $f$  на множестве  $U$ , то разность  $F - G$  постоянна на каждом промежутке  $T \subset U$ .

◄ Непосредственное следствие теоремы о приращениях. ►

**Пример.** Функции  $\text{sign}$  и  $1$  являются первообразными функции  $0$  на множестве  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Однако, их разность непостоянна на этом множестве.

Вслед за Лейбницем всякую первообразную функции  $f$  называют также *неопределенным интегралом* этой функции и обозначают символом  $\int f(x) dx$ . В связи с этим фразу " $F$  есть первообразная функции  $f$  на множестве  $U$ " мы будем считать синонимом выражения  $F(x) = \int f(x) dx | x \in U$ . При этом если  $U = \text{Dom } f$ , то приписку  $x \in U$  будем опускать. Поскольку знак  $\int$  озвучивают словом "интеграл", то

использованную в приведенной формуле букву  $x$  называют *переменной интегрирования*. Смысл и значение такой терминологии и символики постепенно прояснится.

**Примеры и замечания.**

(1)  $|x| = \int \text{sign } x \, dx \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(2)  $e^z = \int e^z \, dz$ .

(3)  $\int x^s \, dx = \begin{cases} \frac{x^{s+1}}{s+1} & s \neq -1 \\ \ln |x| & s = -1 \end{cases}$ .

(4)  $\int x^s \, ds = \frac{x^s}{\ln x}$ , если  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Примеры (3) и (4) подчеркивают значение символа  $dx$  под знаком интеграла как указателя переменной интегрирования, а также то, что в качестве переменной интегрирования используют не только букву  $x$ .

(5)  $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t$ .

(6)  $\int \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t^{-1} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Из формул (5), (6) и леммы о первообразных следует, что сумма  $\arctan t + \arctan t^{-1}$  равна константе  $c_-$  на интервале  $] -\infty, 0[$ , а на интервале  $]0, \infty[$  — константе  $c_+$ . Каковы эти константы?

Метод Ньютона вычисления площадей убеждает нас в том, что всякая непрерывная неотрицательная функция  $f$  на интервале  $T \subset \mathbb{R}$  обладает первообразной. Примером служит функция

$$A(x) := (\mu M_f(p, x)) \text{sign}(x - p), \quad p, x \in T.$$

Поскольку каждая непрерывная вещественная функция есть разность двух неотрицательных непрерывных функций:

$(f = \max(f, 0) - \max(-f, 0))$ , то, стало быть, *на промежутке числовой прямой каждая непрерывная вещественная функция имеет первообразную*.

Предложенное рассуждение станет строгим доказательством существования первообразной с того момента, когда будет дано определение площади и будут установлены ее свойства. Иное доказательство будет предложено в § 5.3.

Так как символ  $\int f(x) \, dx$  обычно трактуют как одну из первообразных функции  $f$ , то наряду со словами "функция  $f$  обладает первообразной" употребляют фразу "существует (определен) интеграл  $\int f(x) \, dx$ ".

**Присмы неопределенного интегрирования**

**Линейность.** Если  $F_i(x) = \int f_i(x) \, dx \mid x \in U$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , то  $\sum \lambda_i F_i(x) = \int \sum \lambda_i f_i(x) \, dx \mid x \in U$  для любых скаляров  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Ина-

че:

$$\int \left( \sum \lambda_i f_i(x) \right) dx = \sum \lambda_i \int f_i(x) dx.$$

Трактовка символа  $\int f(x) dx$  как одной из первообразных функции  $f$  и лемма о первообразных диктуют следующее понимание равенств, содержащих неопределенные интегралы: *если выражения  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  являются суммами, содержащими слагаемые вида  $\lambda \int f(x) dx$ , то формула  $\Phi(x) = \Psi(x)$  означает, что  $\Phi(x) - \Psi(x) = const$  на любом промежутке, на котором определены выражения  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ .*

**Формула интегрирования по частям.** Если  $F'(x) = f(x)$  и  $G'(x) = g(x)$  для всех  $x \in U$  и если на множестве  $U$  определен один из интегралов, участвующих в следующей формуле:

$$\int F(x)g(x) dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x) dx,$$

то на множестве  $U$  определен и другой интеграл и формула верна.

Лейбницево представление дифференциала (§ 4.1) позволяет придать формуле интегрирования по частям следующий компактный вид

$$\int F dG = FG - \int G dF.$$

### Пример

$$\begin{aligned} (7) \quad \int e^x \cos x dx &= \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= e^x \sin x + \int e^x d \cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Следовательно,  $2 \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x)$ .

**Метод замены переменной.** 1. Если  $F(x) = \int f(x) dx | x \in X$ , то для любой дифференцируемой функции (замены переменной)  $x = \varphi(y)$  верна формула

$$F(\varphi(y)) = \int f(\varphi(y)) d\varphi(y) = \int f(\varphi(y))\varphi'(y)dy, | y \in Y := \varphi^{-1}(X).$$

2. Если  $\varphi : Y \rightarrow X$  и  $\psi : X \rightarrow Y$  — взаимно обратные дифференцируемые функции и если  $\int f(\varphi(y))\varphi'(y) dy = H(y) | y \in Y$ , то  $\int f(x) dx = H(\psi(x)) | x \in X$ .

◀ Указанные присмы неопределенного интегрирования устанавливаются путем дифференцирования рассматриваемых функций с учетом

правил дифференцирования суммы, произведения, композиции и обратного отображения. По существу каждая из этих формул есть иная форма соответствующего правила дифференцирования. ►

Формула интегрирования по частям и метод замены переменной выявляют еще одну роль символа  $dx$  под знаком интеграла: благодаря ему подынтегральное выражение имеет форму дифференциала, что придаст алгебраический характер операциям с интегралами.

**Примеры.** (8)  $\int \sqrt{1-s^2} ds \stackrel{s=\sin t}{=} \int (\cos t)^2 dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) = \frac{1}{2}(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t}) \stackrel{t=\arcsin s}{=} \frac{1}{2}(\arcsin s + s\sqrt{1-s^2}, s \in ]-1, 1[.$

$$(9) \int \frac{x dx}{(x^2+1)^s} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^s} \stackrel{z=x^2+1}{=} \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^s} = (\text{пример(3)}).$$

(10)  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^s} = \frac{x}{(x^2+1)^s} + 2s \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^{s+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^s} + 2s \int \frac{dx}{(x^2+1)^s} - 2s \int \frac{dx}{(x^2+1)^{s+1}}.$  В итоге для интегралов рассматриваемого вида имеем рекуррентную формулу:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{s+1}} = \frac{2s-1}{2s} \int \frac{dx}{(x^2+1)^s} + \frac{x}{2s(x^2+1)^s}.$$

### Первообразные рациональных функций.

**Теорема о разложении на простые дроби.** Каждую вещественную рациональную функцию  $\frac{A(x)}{B(x)}$  можно и притом лишь одним способом представить как сумму полинома  $P(x)$  и линейной комбинации всевозможных дробей вида  $\frac{1}{(x-c)^q}$ ,  $\frac{1}{((x-a)^2+b^2)^s}$  и  $\frac{x}{((x-a)^2+b^2)^s}$ , где  $c, a+ib$  – корни полинома  $B$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $q$  и  $s$  – положительные целые числа, не превосходящие кратностей корней  $c$  и  $a+ib$ , соответственно. Если степень полинома  $A$  меньше степени полинома  $B$ , то  $P$  – нулевой полином •

Отыскание первообразных для простых дробей второго и третьего вида с помощью замены переменной  $x = a + bt$  сводится к вычислению неопределенных интегралов (5), (9) и (10).

С другими приемами отыскания первообразных для функций специального вида можно познакомиться по книге В. А. Зорича (ч. 1) и по книге Г. М. Фихтенгольца (т. 2).

Будем говорить, что высказывание  $\Phi(x)$  справедливо для каждой точки множества  $U$ , за исключением, быть может, конечного множества точек, и писать  $\Phi(x) \forall_0 x \in U$ , если имеется такое конечное множество  $K$ , что высказывание  $\Phi(x)$  истинно для любого  $x \in U \setminus K$ . В подобной

ситуации будем говорить также, что  $\Phi$  выполняется в основном для всех точек  $x \in U$ .

**Примеры.** 0) Если  $\Phi(x) \forall x \in U$ , то  $\Phi(x) \forall_0 x \in U$ ;

1)  $D \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \forall_0 u \in [-1, 1]$ ;

2) функция  $f(x) = |x|$  дифференцируема в основном в каждой точке  $p \in \overline{\mathbb{R}}$ . При этом  $Df(x) = \text{sign } x \forall_0 x \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Функцию  $F$  будем называть *обобщённой первообразной* (о.первообразной) функции  $f$  на множестве  $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если:

(C) на  $U$  функция  $F$  непрерывна и конечна (не принимает бесконечных значений);

(D)  $DF(x) = f(x) \forall_0 x \in U$ .

**Примеры и замечания.** 1. На  $\mathbb{R}$  функция  $f(x) = \text{sign } x$  не имеет первообразной, но имеет о.первообразную  $F(x) = |x|$ .

2. Функция  $\frac{1}{s+1}x^{s+1}$  является о.первообразной функции  $x^s$  на полуинтервале  $[0, \infty[$  при  $s > -1$ , а при  $s < -1$  — на полуинтервале  $]0, \infty]$ . (Считается, что  $\infty^r = 0$ , если  $r < 0$ .)

3. Функция  $\arctan t$  есть о.первообразная функции  $\frac{1}{1+t^2}$  на  $\overline{\mathbb{R}}$ . (Считается, что  $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ .)

4. Функция  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемая условиями  $\chi(x) = 1$ , если  $x \in ]a < b]$ ,  $\chi(x) = 0$ , если  $x \notin ]a < b]$ , обладает о.первообразной на отрезке  $[-\infty, \infty]$  (укажите какую-нибудь), но не имеет первообразной на отрезке  $[a, b]$ .

5. Функция  $f$  может обладать о.первообразной на промежутке  $U$ , будучи неопределённой в нескольких точках этого промежутка. Зачастую это крайние точки промежутка  $U$ . Однако любая о.первообразная такой функции на  $U$  не только задана на всём  $U$ , но и непрерывна в каждой точке  $p \in U$ .

6. Лемма о первообразных справедлива и для обобщённых первообразных.

Использование понятия обобщённой первообразной значительно расширяет область применимости идей Ньютона.

## § 5.2. Интеграл

Будем говорить, что *функция  $f$  интегрируема (по Ньютону) на отрезке  $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$*  и писать  $f \in N[a, b]$ , если она обладает обобщённой первообразной на этом отрезке. Интегрируемая на отрезке функция может быть неопределённой в некоторых точках этого отрезка.

Пусть  $f$  — интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  функция и  $F$  — какая-нибудь её обобщённая первообразная на этом отрезке. Приращение  $F|_a^b$

функции  $F$  будем называть (ньютоновым) *интегралом* от  $a$  до  $b$  функции  $f$  и обозначать  $\int_a^b f(x) dx$ , или  $\int_a^b f dx$ , или даже иногда  $\int_a^b f$ .

Определение интеграла корректно, т. е. не зависит от выбора о.первообразной, поскольку на отрезке разность любых двух о.первообразных функции  $f$  постоянна.

Букву  $x$ , участвующую в записи интеграла, называют *переменной интегрирования*. Разумеется, в качестве переменной интегрирования используют и другие буквы.

Если  $f \in N[a, b]$ , то говорят, что существует (определен) интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , а равенство

$$\int_a^b f(x) dx = F|_a^b, \quad (\text{N-L})$$

где  $F$  — о.первообразная функции  $f$  на  $[a, b]$ , называют *формулой Ньютона–Лейбница*.

**Геометрическая интерпретация интеграла.** Пусть  $f$  — непрерывная функция на отрезке  $[a < b] \subset \mathbb{R}$ . Если  $f \geq 0$ , то, как показано во введении,  $\int_a^b f dx = \mu M_f(a, b)$ . Согласно представлениям, установившимся в XVII в., площадь фигуры  $M_f(a, b)$  равна сумме площадей бесконечного семейства прямоугольников высоты  $f(x)$  и бесконечно малой ширины  $dx$ . Отсюда обозначение Лейбница  $\int_a^b f(x) dx$ . Знак  $\int$  — это видоизменение буквы  $S$ , символизировавшей операцию суммы.

В общем случае функция  $f$  является разностью неотрицательных непрерывных функций  $f^+ := \max(f, 0)$  и  $f^- := (-f)^+$ . Поэтому

$$\int_a^b f dt = \int_a^b f^+ dt - \int_a^b f^- dt.$$

### Элементарные свойства интеграла

$I_1$ . *Линейность*: если функции  $f_1, \dots, f_n$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ , то для любых констант  $c_1, \dots, c_n$  функция  $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$  также



интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b f dx = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i dx.$$

$I_2$ . *Ориентированность*:  $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$ . Точнее, если в этой формуле определен один из интегралов, то определен другой и формула верна.

$I_3$ . *Аддитивность*:  $\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx$ . Точнее, если в этой формуле определены какие-либо два интеграла, то определен третий и формула верна.

$I_4$ . *Ограниченность*: если функции  $f$  и  $h$  интегрируемы на отрезке  $[a \leq b]$ , причём  $|f(x)| \leq h(x) \forall_0 x \in [a, b]$ , то  $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b h dx$ . В частности, если функции  $f$  и  $|f|$  интегрируемы на отрезке  $[a \leq b]$ , то  $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ .

$I_5$ . *Монотонность*: если  $f, g \in N[a \leq b]$  и  $f \leq g$  в основном для всех точек отрезка  $[a, b]$ , то  $\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$ .

$I_6$ . *Устойчивость относительно малых изменений*: если  $f \in N[a, b]$  и  $g(x) = f(x) \forall_0 x \in [a, b]$ , то  $g \in N[a, b]$  и  $\int_a^b g dx = \int_a^b f dx$ .

$I_7$ . Если  $\int_a^b |f| dx = 0$ , то  $f(x) = 0 \forall_0 x \in [a, b]$ .

◀  $I_1$ . Пусть  $F_i$  — какая-нибудь первообразная функции  $f_i$  на отрезке  $[a, b]$  и  $K_i$  — такое конечное множество, что  $F_i'(t) = f_i(t) \forall t \in [a, b] \setminus K_i$ . Пусть  $K := \bigcup_{i=1}^n K_i$  и  $F := \sum_{i=1}^n c_i F_i$ . Функция  $F$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $F'(t) = f(t) \forall t \in [a, b] \setminus K$ . Значит,  $F$  есть первообразная для функции  $f$  на  $[a, b]$  и потому  $f \in N[a, b]$ , причём

$$\int_a^b f dx = F|_a^b = \sum_{i=1}^n c_i F_i|_a^b = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i dx.$$

$I_2$ . Прямое следствие определения интеграла.

$I_3$ . Предположим, что функция  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и на  $[b, c]$ .

Согласно формуле Н-Л функция  $I(x) := \int_b^x f(t) dt$  служит о.первообразной

для функции  $f$  на каждом из этих отрезков. Поэтому:

(С) она непрерывна на каждом из них и, следовательно, непрерывна на отрезке  $X := [a, b] \cup [b, c]$  вне зависимости от взаимного расположения точек  $a, b, c$ ;

(D)  $I'(x) = f(x) \forall_0 x \in X$ .

Значит, функция  $I$  служит о.первообразной для  $f$  на отрезке  $X$ , а, значит, и на отрезке  $[a, c] \subset X$ . Остается заметить, что  $I|_a^c = I|_a^b + I|_b^c$  и вспомнить формулу Н-Л.

$I_4$ . Пусть  $F$  и  $H$  — о.первообразные функций  $f$  и  $h$  на  $[a, b]$ . Поскольку  $|DF(x)| \leq DH(x)$  в основном для всех  $x \in [a, b]$ , то согласно теореме о приращениях  $|F|_a^b \leq H|_a^b$ .

$I_5$ . Следствие п. 4), примененного к функциям  $0$  и  $h = g - f$ .

$I_6$ . Пусть  $F$  — какая-либо о.первообразная для функции  $f$ , а  $K$  и  $L$  — такие конечные множества, что  $DF(x) = f(x)$  для каждого  $x \in [a, b] \setminus K$ , а  $g(x) = f(x)$  для каждого  $x \in [a, b] \setminus L$ . Следовательно,  $DF(x) = g(x)$  для каждого  $x \in [a, b] \setminus (K \cup L)$ . К тому же функция  $F$  непрерывна на  $[a, b]$  и, значит, служит о.первообразной для  $g$ . Остается применить формулу Н-Л.

$I_7$ . Пусть  $F$  — произвольная о.первообразная для функции  $|f|$ . Поскольку  $|f| \geq 0$ , то согласно теореме о приращениях функция  $F$  возрастает на  $[a, b]$ . А так как  $F|_a^b = 0$ , то  $F$  постоянна на  $[a, b]$  и, стало быть,  $0 = DF(x) = |f(x)|$  в основном для всех точек отрезка  $[a, b]$ . ►

**Упражнение.** Если  $f, h \in N[a, b]$ , причём  $|f(x)| \leq h(x) \forall_0 x \in [a, b]$ , то  $|\int_a^b f dx| \leq |\int_a^b h dx|$  независимо от взаимного расположения точек  $a, b$ .

**Интеграл как функция верхнего предела.** Если функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то функция  $I(x) := \int_a^x f(t) dt$

1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;

2)  $DI(x) = f(x)$  в любой внутренней точке  $x$  этого отрезка, в которой функция  $f$  непрерывна.

◀ 1. Согласно формуле Н-Л функция  $I$  является о.первообразной функции  $f$  на  $[a, b]$  и потому непрерывна.

2. Пусть  $p \in ]a, b[$  — точка непрерывности функции  $f$  и  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow p} f(p)$ , то найдется интервал  $U$ , содержащий точку  $p$ ,

для каждой точки  $t$  которого выполняется неравенство  $|f(t) - f(p)| < \varepsilon$ . Следовательно, для всякого  $x \in U \setminus \{p\}$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(x) - I(p)}{x - p} - f(p) \right| &= \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x f(t) dt - (x - p)f(p) \right| = \\ &= \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x (f(t) - f(p)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно (АКС)  $f(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{I(x) - I(p)}{x - p} = I'(p)$ . ►

**Упражнение.** Сформулировать и доказать теорему об интеграле как функции нижнего предела.

**Формула интегрирования по частям (ФИЧ).** Пусть  $f$  и  $g$  — функции, дифференцируемые в основном во всех точках отрезка  $[a, b]$ . Если функция  $fg$  непрерывна на этом отрезке и если в формуле

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = fg|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

определен один из участвующих в ней интегралов, то определен другой интеграл и формула верна. Более компактный вид этой формулы таков:

$$\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df.$$

◀ Пусть определен интеграл в левой части формулы. Тогда функция  $I(x) := \int_a^x f dg$  является о.первообразной для функции  $f(x)g'(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . Пусть  $K$  — такое конечное множество, что для каждого  $x \in [a, b] \setminus K$   $I'(x) = f(x)g'(x)$ , а функции  $f$  и  $g$  дифференцируемы в точке  $x$ . Тогда для каждой такой точки  $X$  имеет место равенство  $(fg)'(x) - I'(x) = g(x)f'(x)$ . Следовательно, функция  $fg - I$ , будучи непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , служит о.первообразной для функции  $gf'$  на этом отрезке. Согласно формуле Н-Л,

$$\int_a^b g df = (fg - I)|_a^b = fg|_a^b - \int_a^b f dg. \blacktriangleright$$

**Формула замены переменных (ФЗП).** Пусть  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  – такое непрерывное отображение, что  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и  $\varphi'(\tau) \neq 0 \forall \tau \in ]\alpha, \beta[$ . Если в формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) d\tau$$

определен один из интегралов, то определен другой и они равны.

◀ Пусть  $g(\tau) := f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)$ .

1) отображение  $\varphi$  инъективно: если бы  $\varphi$  склеило какие-либо две различные точки, то по теореме Ролля где-то между ними производная  $\varphi'$  обратилась бы в нуль.

Предположим теперь, что в ФЗП определен левый интеграл. Пусть  $F$  – какая-нибудь первообразная функции  $f$  на  $[a, b]$ ,  $K$  – такое конечное множество, что  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b] \setminus K$ , и  $G = F \circ \varphi$ .

Функция  $G$  конечна и непрерывна на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Кроме того,  $G'(\tau) = f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) = g(\tau) \forall \tau \in [\alpha, \beta] \setminus \varphi^{-1}(K)$ . Так как отображение  $\varphi$  инъективно, то множество  $\varphi^{-1}(K)$  конечно. Следовательно, функция  $G$  служит первообразной для функции  $g$  на  $[\alpha, \beta]$ , т. е. в ФЗП определен правый интеграл, причем

$$\int_\alpha^\beta g(\tau) d\tau = G|_\alpha^\beta = F|_a^b = \int_a^b f(x) dx.$$

Допустим теперь, что в ФЗП определен правый интеграл. Опираясь на признак Больцано, теорему об обратной функции и правило дифференцирования композиции, нетрудно понять, что инъективное отображение  $\varphi$  обратимо и что обратное к нему отображение  $\psi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому согласно пункту 1) и правилу дифференцирования обратного отображения

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta g(\tau) d\tau &= \int_a^b g(\psi(x))\psi'(x) dx = \int_a^b f(\varphi(\psi(x)))\varphi'(\psi(x))\psi'(x) dx = \\ &= \int_a^b f(x) dx. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## Приложения

**1. Принцип Кавальери** (модернизированный). Во второй части курса для каждого  $U \subset \mathbb{R}^k$  будет определено неотрицательное число  $\mu_k(U)$ , называемое  $k$ -мерным объемом или  $k$ -мерной мерой множества  $U$ . При  $k = 1$  число  $\mu_k(U)$  называют длиной, при  $k = 2$  — площадью, а при  $k = 3$  — объемом фигуры  $U$ .

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^k$ . Для каждого числа  $x \in \mathbb{R}$  положим  $U_x := \{(y_1, \dots, y_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} : (x, y_1, \dots, y_{k-1}) \in U\}$ . Будет установлено, что практически для всякого множества  $U \subset \mathbb{R}^k$  справедлив следующий факт:

*Если функция  $f(x) := \mu_{k-1}(U_x)$  интегрируема на  $[a < b]$  и равна нулю вне этого отрезка, то*

$$\mu_k(U) = \int_a^b f(x) dx.$$

**2. Интегральная форма остатка разложения Тейлора.** Если на отрезке  $[p, x]$  функция  $f$  дифференцируема  $k + 1$  раз, то

$$f(x) - \sum_{j=0}^k \frac{D^j f(p)}{j!} (x-p)^j = \frac{(x-p)^{k+1}}{(k+1)!} \int_1^0 D^{k+1} f(x(t)) d(1-t)^{k+1},$$

где  $x(t) = p + t(x-p)$ .

◀ Сначала докажем это утверждение для  $k = 0$ . Поскольку на отрезке  $[p, x]$  функция  $f$  является первообразной для своей производной, то

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= \int_p^x Df(u) du \stackrel{u=x(t)}{=} \int_0^1 Df(x(t)) dx(t) = \\ &= (x-p) \int_0^1 Df(x(t)) dt = (x-p) \int_1^0 Df(x(t)) d(1-t). \end{aligned}$$

Допустим теперь, что верна формула

$$f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{D^j f(p)}{j!} (x-p)^j = \frac{(x-p)^k}{k!} \int_1^0 D^k f(x(t)) d(1-t)^k. \quad (R_{k-1})$$

Обратившись к ФИЧ, получим

$$\begin{aligned}
\int_1^0 D^k f(x(t)) d(1-t)^k &= D^k f(x(t))(1-t)^k \Big|_{t=1}^{t=0} - \int_1^0 (1-t)^k d(D^k f(x(t))) = \\
&= D^k f(p) - \int_1^0 (1-t)^k D^{k+1} f(x(t)) x'(t) dt = \\
&= D^k f(p) + \frac{x-p}{k+1} \int_1^0 D^{k+1} f(x(t)) d(1-t)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Теперь доказываемая теорема является простым арифметическим следствием полученного результата и формулы  $(R_{k-1})$ . ►

**3. Ньютоново разложение бинома.** Если  $x \in ]-1, 1[$ , то

$$(1+x)^s = \sum_{n \in \mathbb{N}} C_s^n x^n, \quad C_s^n := \frac{s(s-1) \cdots (s-(n-1))}{n!}.$$

◄ Пусть  $f(x) := (1+x)^s$ . Тогда  $D^n f(x) = (1+x)^{s-n} C_s^n n!$  и, стало быть, биномиальный ряд является рядом Тейлора функции  $f$  в точке  $p=0$ . Согласно предыдущей теореме, чтобы установить формулу Ньютона, достаточно показать, что последовательность

$$r_k(x) := \frac{x^k}{k!} \int_1^0 D^k f(x(t)) d(1-t)^k = x^k C_s^k k \int_0^1 (1+xt)^{s-k} (1-t)^{k-1} dt$$

стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

Пусть  $m$  — такое целое число, что  $|s| \leq m+1$ . Тогда

$$\begin{aligned}
|C_s^k| &\leq \frac{|s|(|s|+1) \cdots (|s|+k-1)}{k!} \leq \frac{(m+1) \cdots (m+k)}{k!} = \frac{(m+k)!}{m!k!} = \\
&= \frac{(k+1) \cdots (m+k)}{m!} \leq \frac{(k+m)^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Далее, если  $x > -1$ , а  $t > 0$ , то  $1+xt > 1-t$  и потому

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 (1+xt)^{s-k} (1-t)^{k-1} dt \right| &= \int_0^1 (1+xt)^{s-1} \left( \frac{1-t}{1+xt} \right)^{k-1} dt \leq \\
&\leq \int_0^1 (1+xt)^{s-1} dt := I(s).
\end{aligned}$$

И наконец, если  $|x| < 1$ , а  $k > m$ , то  $|r_k(x)| \leq |x|^k \frac{(k+m)^m}{m!} kI(s) \leq \frac{2^m I(s)}{m!} k^{m+1} |x|^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . ►

**4. Иррациональность чисел  $\pi$  и  $e^r$ .** Пусть  $r = p/q$ , где  $p, q$  — положительные целые числа, и пусть

$$\Psi_n(x) := \frac{1}{n!} (qx)^n (p - qx)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Лемма.** Числа  $D^i \Psi_n(0)$  и  $D^i \Psi_n(r)$  целые при любых  $i, n \in \mathbb{N}$ .

◄ Если  $i < n$ , то в силу формулы Лейбница  $D^i \Psi_n(0) = D^i \Psi_n(r) = 0$ . Пусть  $i \geq n$ . Полином  $\Psi_n(x)$  можно представить в виде

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j \geq 0} a_j (qx)^j,$$

где  $a_j$  — целые числа. Следовательно,

$$D^i \Psi_n(x) = \sum_{j \geq i} a_j \frac{q^j}{n!} D^i x^j = \sum_{j \geq i} a_j \frac{j!}{n!(j-i)!} (qx)^{j-i} q^i.$$

Так как здесь  $j \geq i \geq n$ , то дробь

$$\frac{j!}{n!(j-i)!} = \frac{j!}{i! n!(j-i)!} = C_j^i \frac{i!}{n!}$$

является целым числом. Поэтому и при  $i \geq n$  числа  $D^i \Psi_n(0)$  и  $D^i \Psi_n(r)$  оказываются целыми. ►

1. Допустим, что  $e^r = k/l$ , где  $k, l \in \mathbb{N}$ . Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  положим  $I_n := l \int_0^r \Psi_n(x) e^x dx$ . Многократно применяя ФИЧ, видим, что  $I_n = l \sum_{i=0}^{2n} D^i \Psi_n(x) e^x \Big|_0^r$ . Поэтому, согласно доказанной лемме число  $I_n$  целое при любом  $n \in \mathbb{N}$ . В то же время  $I_n > 0$ , ибо на интервале  $]0, r[$  функция  $\Psi_n(x) e^x$  положительна (свойство  $I_7$  интеграла). Следовательно,  $I_n \geq 1$  при любом  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $s := \sup\{qx(p - qx) : x \in [0, p/q]\}$ . Тогда  $I_n \leq \frac{s^n}{n!} \int_0^r e^x dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Абсурд! Следовательно,  $e^r \notin \mathbb{Q}$  для каждого  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

В 1873 г. Эрмит установил трансцендентность числа  $e$ .

2. Допустим теперь, что  $\pi = r$ . Поступая с интегралом  $J_n := \int_0^\pi \Psi_n(x) \sin x dx$  так же, как и с интегралом  $I_n$ , приходим к заключению, что  $J_n$  есть целое число, большее нуля при любом  $n \in \mathbb{N}$  и что  $J_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Абсурд! Значит,  $\pi$  иррационально (Ламберт, 1766).

В 1882 г. Линдеман установил, что число  $\pi$  трансцендентно.

### § 5.3. Признаки интегрируемости

Будем говорить, что функция  $f$  в основном непрерывна на множестве  $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ , если существует такое конечное множество  $K$ , что непрерывно ее сужение на множество  $X \setminus K$ , т.е., если непрерывно отображение  $f : X \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ . Например, функции  $\operatorname{sign} x$  и  $\ln |x|$  в основном непрерывны на отрезке  $[-\infty, \infty]$ , а функция  $\tan x$  в основном непрерывна на отрезке  $[-n, n]$ .

**Принцип сравнения.** Если функция  $f$  в основном непрерывна на отрезке  $T = [a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$  и существует такая интегрируемая на этом отрезке функция  $h$ , что  $|f(t)| \leq h(t)$  в основном для каждого  $t \in T$ , то  $f$  интегрируема на отрезке  $T$ . Сокращенно: в основном непрерывная функция, обладающая *интегрируемой мажорантой*, интегрируема.

◀ Пусть  $K$  — такое конечное множество, содержащее концы отрезка  $T$ , что  $|f(t)| \leq h(t) \forall t \in T \setminus K$ , а функция  $f : T \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Буквы  $t, x, y, z$  будем использовать лишь для обозначения точек отрезка  $T$ .

Для любых точек  $x \leq y$  определим множество  $M(x, y)$  и число  $S_x^y$ :  
 $M(x, y) := \{u \in N[x, y] : u(t) \leq f(t) \forall t \in [x, y] \setminus K\}$  и

$$S_x^y := \sup \left\{ \int_x^y u : u \in M(x, y) \right\}.$$

1. Если  $u, v \in N[x \leq y]$  и  $u(t) \leq f(t) \leq v(t) \forall t \in [x \leq y] \setminus K$ , то  $\int_x^y u \leq S_x^y \leq \int_x^y v$ . В частности,  $\int_x^y (-h) \leq S_x^y \leq \int_x^y h$  и потому  $|S_x^y| < \infty$ .

2. Если  $x \leq y \leq z$ , то  $S_x^z = S_x^y + S_y^z$ .

◁ Для каждой функции  $u \in M(x, z)$  имеем  $\int_x^z u = \int_x^y u + \int_y^z u \leq S_x^y + S_y^z$ . Следовательно,  $S_x^z \leq S_x^y + S_y^z$ .

Докажем противоположное неравенство. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как числа  $S_x^y$  и  $S_y^z$  конечны, то существуют такие функции  $u \in M(x, y)$  и  $v \in M(y, z)$ , что  $\int_x^y u \geq S_x^y - \varepsilon$  и  $\int_y^z v \geq S_y^z - \varepsilon$ . Определим функцию  $w \in M(x, z)$  следующими условиями:  $w(t) = u(t)$ , если  $t \in [x, y]$ , и  $w(t) = v(t)$ , если  $t \in [y, z]$ . Поскольку  $w \in M(x, z)$  (в силу каких свойств интеграла?), то  $S_x^z \geq \int_x^z w = \int_x^y w + \int_y^z w = \int_x^y u + \int_y^z v \geq S_x^y + S_y^z - 2\varepsilon \forall \varepsilon > 0$ . ▷

Для каждого  $x \in T$  положим  $F(x) := S_a^x$ .

3. Функция  $F$  непрерывна на отрезке  $T$ .



◁ Из ш. 2 и 1 вытекает, что  $-\int_x^y h \leq S_x^y = F(y) - F(x) \leq \int_x^y h$ , если  $x < y$ , и  $-\int_y^x h \leq F(x) - F(y) \leq \int_y^x h$ , если  $x > y$ . Следовательно,  $|F(x) - F(y)| \leq \left| \int_y^x h dt \right|$  для любых  $x, y$ . А так как интеграл как функция верхнего предела непрерывен, то  $\left| \int_y^x h dt \right| \xrightarrow{x \rightarrow y} 0$ . Следовательно, и  $|F(x) - F(y)| \xrightarrow{x \rightarrow y} 0$ , т. е. функция  $F$  непрерывна в каждой точке  $y \in T$ . ▷

4. Если  $p \in T \setminus K$ , то  $DF(p) = f(p)$ .

◁ Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как функция  $f : T \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $p$ , то найдется такой интервал  $U := ]\alpha < \beta[$ , содержащий  $p$ , что  $f(p) - \varepsilon < f(t) < f(p) + \varepsilon$  для всех  $t \in U \setminus K$ . Крайние члены этих неравенств суть константы и, стало быть, интегрируемы на  $[p, x]$  при любом  $x \in U$ . Поэтому согласно пунктам 1) и 2) для каждого  $x \in ]p < x[$  справедливы неравенства

$$\int_p^x (f(p) - \varepsilon) dt \leq S_p^x = F(x) - F(p) \leq \int_p^x (f(p) + \varepsilon) dt$$

и, следовательно,

$$f(p) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(p)}{x - p} \leq f(p) + \varepsilon, \text{ т. е.}$$

$$\left| \frac{F(x) - F(p)}{x - p} - f(p) \right| \leq \varepsilon \forall x \in ]p < \beta].$$

Согласно (АКС),  $f(p) = \lim_{x \searrow p} \frac{F(x) - F(p)}{x - p} = D_+ F(p)$ .

По аналогичной причине  $f(p) = D_- F(p)$ . ▷

Согласно ш. 3 и 4,  $F$  есть о.первообразная для функции  $f$  на отрезке  $T$ . ►

**Следствие.** На ограниченном отрезке всякая непрерывная функция интегрируема.

◀ На отрезке всякая непрерывная функция ограничена некоторой константой, а на ограниченном отрезке всякая константа интегрируема.

►

**Признак существования обобщенной первообразной.** Функция  $f$  обладает о.первообразной на промежутке  $T \subset \mathbb{R}$ , если она в основном непрерывна на  $T$  и ограничена на каждом отрезке этого промежутка.

ка. В частности, всякая непрерывная функция на промежутке  $T \subset \mathbb{R}$  обладает обобщенной первообразной на этом промежутке.

◀ Пусть  $a \in T$ . Покажем, что функция  $I(x) := \int_a^x f dt$  служит первообразной для функции  $f$  на  $T$ .

С) Поскольку всякий отрезок, содержащийся в  $T$ , ограничен, то согласно принципу сравнения, функция  $f$  на каждом таком отрезке интегрируема. Следовательно, функция  $I(x)$  определена в каждой точке  $x \in T$ .

Согласно формуле N-L, функция  $I$  непрерывна на любом отрезке промежутка  $T$ , содержащем точку  $a$ , и, значит, непрерывна на всем  $T$ .

Д) Пусть  $p \in T \setminus K$ , где  $K$  – такое конечное множество, содержащее концы  $T$ , что функция  $f : T \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна, и пусть  $\varepsilon > 0$ . Поскольку  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow p} 0$ , то найдется такой интервал  $U$ , содержащий точку  $p$ , что  $|f(t) - f(p)| < \varepsilon \forall t \in U \setminus K$ . Следовательно, для всякого  $x \in U \setminus \{p\}$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(x) - I(p)}{x - p} f(p) \right| &= \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x f(t) dt - (x - p)f(p) \right| = \\ &= \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x (f(t) - f(p)) dt \right| \leq \frac{1}{|x - p|} \left| \int_p^x \varepsilon dt \right| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Согласно (АКС),  $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{I(x) - I(p)}{x - p} = I'(p)$ . ▶

Поскольку обычно встречающиеся функции одной вещественной переменной в основном непрерывны, то, как правило, на ограниченном отрезке ограниченные функции интегрируемы. Если же либо рассматриваемый отрезок  $[a, b]$  неограничен, либо на нем неограничена функция  $f$ , то выражение  $\int_a^b f(x) dx$  часто называют *несобственным интегралом* (Математическая энциклопедия, т. 3). Для работы с такими интегралами полезно следующее соглашение.

Будем говорить, что *функция  $f(x)$  непрерывно продолжаема на отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$* , если имеется такая непрерывная функция  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , что  $\tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ . В этом случае разность  $\tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)$  будем обозначать символом  $f(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$  или  $f \Big|_a^b$ , если нет повода для недоразумений.

**Упражнения.** 0.  $e^{-t} \Big|_0^\infty = -1$ ,  $\arctan \Big|_{-\infty}^\infty = \pi$ .

1. Если функция  $F$  непрерывно продолжаема на отрезок  $[a, b]$  и если  $DF(x) = f(x) \forall x \in ]a, b[$ , то функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и справедлив предельный вариант формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f dx = F \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b|]a, b[} F(x) - \lim_{x \rightarrow a|]a, b[} F(x).$$

2. **Предельный вариант формулы интегрирования по частям.**

Пусть  $f$  и  $g$  — функции, дифференцируемые в основном во всех точках отрезка  $[a, b]$ . Если функция  $fg$  непрерывно продолжаема на этот отрезок и если в формуле

$$\int_a^b f dg = fg \Big|_a^b - \int_a^b g df$$

определен один из участвующих в ней интегралов, то определен другой интеграл и формула верна.

До конца этого параграфа предполагается, что  $a < b$ .

**Лемма о сходящемся интеграле.** Интеграл  $\int_a^b f dt$  определен в том и только в том случае, когда функция  $f$  обладает обобщенной первообразной на полуинтервале  $[a < b[$ , а функция  $I(x) := \int_a^x f(t) dt$  имеет конечный предел при  $x \nearrow b$ . В этом случае

$$\int_a^b f dt = \lim_{x \nearrow b} \int_a^x f dt.$$

◀ Необходимость указанного условия есть прямое следствие формулы Н-Л.

Если же  $I(x) \xrightarrow{x \nearrow b} z \in \mathbb{R}$ , то функция  $\tilde{I}$ , заданная условиями  $\tilde{I}(x) = I(x)$  при  $x \in [a < b[$  и  $\tilde{I}(b) = z$ , является о. первообразной функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  и, значит,  $f \in N[a, b]$ , причём  $\int_a^b f dt = \tilde{I} \Big|_a^b = z$ .

▶

Ввиду этой леммы становится яснее, почему наравне с фразами "функция  $f$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ " и "интеграл  $\int_a^b f(t) dt$  опре-

делен" говорят: "интеграл  $\int_a^b f(t) dt$  сходится" (надо бы добавлять что-нибудь вроде "вблизи точки  $b$ " или "в точке  $b$ ".)

**Критерий Коши сходимости интеграла.**  $\int_a^b f dt$  определен (сходится вблизи  $b$ ) в том и только в том случае, когда функция  $f$  обладает обобщенной первообразной на полуинтервале  $[a, b[$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b[ \mid \forall \alpha, \beta \in [c, b[ \mid \left| \int_{\alpha}^{\beta} f dt \right| \leq \varepsilon.$$

(Сравните с критерием Коши суммируемости ряда.)

◀ Пусть  $I(x) := \int_a^x f dt$ .

Если определен интеграл  $I(b)$ , то  $I(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} I(b)$ , и потому для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется такая точка  $c \in [a, b[$ , что  $|I(x) - I(b)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \forall x \in [c, b[$ . Следовательно, если  $\alpha, \beta \in [c, b[$ , то

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f \right| = \left| \int_a^{\beta} f - \int_a^{\alpha} f \right| = |I(\beta) - I(b) + I(b) - I(\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Предположим теперь, что выполняются условия доказываемого критерия, и пусть,  $x_n \in [a, b[$  – последовательность, сходящаяся к точке  $b$ . Покажем, что последовательность  $I(x_n)$  удовлетворяет условию Коши. Пусть  $\varepsilon > 0$  и точка  $c \in T$  такова, что

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f \right| \leq \varepsilon \forall \alpha, \beta \in [c, b[. \text{ Поскольку } x_n \rightarrow b, \text{ то } x_n \in [c, b[ \text{ для всех } n,$$

начиная с некоторого номера  $m$ . Тем самым  $|I(x_k) - I(x_l)| = \left| \int_{x_k}^{x_l} f \right| \leq \varepsilon$  для любых  $k$  и  $l$ , следующих за  $m$ . Согласно критерию Коши, последовательность  $I(x_n)$  сходится к некоторому  $z \in \mathbb{R}$ . В силу критерия сходимости Гейне  $z = \lim_{x \nearrow b} I(x)$ . Из этого, согласно лемме о сходящемся интеграле, следует, что  $f \in N[a, b]$ . ▶

**Асимптотический признак Вейерштрасса.** Пусть на полуинтервале  $[a < b[$  функция  $f$  обладает обобщенной первообразной и существует такая интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  неотрицательная функция  $h$ , что  $f(x) \underset{x \nearrow b}{**} (h(x))$ , где знак  $**$  обозначает одно из трех отношений сравнения:  $= O, = o, \sim$ . Тогда  $f \in N[a, b]$ .

◀ Ниже там, где необходимо, незримо присутствует приписка  $x \nearrow b$ .

Пусть  $f = O(h)$ . В данной ситуации это означает, что имеются такая константа  $K \in \mathbb{R}$  и такая точка  $p \in [a, b]$ , что  $|f(x)| \leq K h(x)$  при любом  $x \in [p, b]$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ . Так как  $h \in N[a, b]$ , то, согласно критерию Коши, найдется такая точка  $q \in [p, b]$ , что  $|\int_{\alpha}^{\beta} h| \leq \frac{\varepsilon}{K}$  для любых  $\alpha, \beta \in [q, b]$ .

Следовательно, для таких  $\alpha, \beta$  имеем  $|\int_{\alpha}^{\beta} f| \leq |\int_{\alpha}^{\beta} Kh| \leq \varepsilon$ . Остается прибегнуть к услугам критерия Коши.

Если  $f = o(h)$ , то  $f = O(h)$ . Если же  $f \sim h$ , то  $f - h = o(h)$ . ▶

**Неравенство Абеля.** Если определен интеграл  $\int_a^b u(t)v(t) dt$ , где  $u$  — убывающая положительная функция на полуинтервале  $[a < b]$ , и если  $|\int_a^x v(t) dt| \leq s$  для каждого  $x \in [a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b u(t)v(t) dt \right| \leq su(a).$$

◀ Доказательство этой теоремы в полном объеме выходит за рамки начального студенческого курса. Поэтому дополнительно будем предполагать, что функция  $u$  непрерывна на полуинтервале  $[a, b]$  и дифференцируема в основном в каждой его точке.

Пусть  $J(x) := \int_a^x v dt$ . Согласно ФИЧ для каждого  $c \in [a, b]$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^c uv dt \right| &= \left| uJ \right|_a^c + \int_a^c (-u')J dt \leq u(c)s + s \int_a^c (-u') dt = \\ &= s(u(c) + (-u)|_a^c) = su(a). \end{aligned}$$

Остается перейти к пределу при  $c \nearrow b$ . ▶

**Признак интегрируемости Абеля–Дирихле.**

Интеграл  $\int_a^b u(t)v(t)dt$  определен, если на полуинтервале  $[a < b]$

- 1) функция  $u(t)v(t)$  обладает обобщенной первообразной;
- 2) функция  $u(t)$ , убывая, стремится к нулю при  $t \nearrow b$ ;
- 3) функция  $v$  обладает ограниченной обобщенной первообразной.

◀ Пусть  $\varepsilon > 0$ . Из условия 3 следует, что существуют такая обобщенная первообразная  $V$  функции  $v$  и такая константа  $s \in \mathbb{R}$ , что

$$|V(x)| \leq s \quad \forall x \in [a, b].$$

По условию 2 найдется такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $u(t) \leq \frac{\varepsilon}{2s} \quad \forall t \in [c, b]$ .

По условию 1 на любом отрезке  $[p < q] \subset [c, b]$  функция  $u(t)v(t)$  интегрируема, причём  $|\int_p^x v| = |V(x) - V(p)| \leq 2s \quad \forall x \in [p, q]$ . Согласно неравенству Абеля,

$$\left| \int_p^q uv \, dt \right| \leq u(p)2s \leq \varepsilon.$$

Остается прибегнуть к услугам критерия Коши. ►

**Типичный пример.** Функция  $f(x) := \frac{\sin x}{x}$  интегрируема по Ньютоу на отрезке  $[0, \infty]$ , а функция  $|f|$  — нет.

◄ На отрезке  $[0, 1]$  функция  $f$  интегрируема в силу принципа сравнения, а на отрезке  $[1, \infty]$  — по признаку Абеля–Дирихле. В то же время

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt &= \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt > \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi} dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

Поэтому функция  $|\frac{\sin x}{x}|$  не интегрируема на отрезке  $\overline{\mathbb{R}}_+$  согласно лемме о сходящемся интеграле.

Другой способ оценки. Поскольку  $|f(t)| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1 - \cos 2t}{2t}$  и так как на  $[1, \infty]$  функция  $\frac{\cos 2t}{2t}$  интегрируема на  $[1, \infty]$ , а функция  $\frac{1}{2t}$  нет, то и  $|f|$  тоже нет. ►

**Упражнение.**  $1 - \frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}$ . (Подсказ:  $[0, \infty] = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty]$ .)

В общей теории интеграла будет показано, что *интеграл Дирихле*  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  равен  $\frac{\pi}{2}$ .

Говорят, что функция  $f$  *абсолютно интегрируема* на  $[a, b]$ , если функция  $|f|$  интегрируема на этом отрезке. Если в основном непрерывная функция абсолютно интегрируема на  $[a, b]$ , то, согласно принципу сравнения, она интегрируема на  $[a, b]$ . Функция  $\frac{\sin x}{x}$  интегрируема, но не абсолютно интегрируема на отрезке  $[0, \infty]$ .

## Приложения

**1. Гамма-функция Эйлера.** Так называют функцию

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

1) Функция  $\Gamma(x)$  определена для каждого  $x > 0$ .

◁ При  $x > 0$  на отрезке  $[0, 1]$  функция  $e^{-t} t^{x-1}$  переменной  $t$  мажорируется интегрируемой функцией  $t^{x-1}$ , а на отрезке  $[1, \infty]$  — интегрируемой функцией вида  $c e^{-t/2}$ , где  $c$  — некоторая константа, зависящая от  $x$ . ▷

2)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  (следствие ФИЧ) и поэтому  $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$ . В связи с этим полагают  $x! := \Gamma(x+1)$ .

**Информация.** При детальном исследовании функций, определяемых интегралами, будет установлено, что  $\Gamma$  — бесконечно дифференцируемая выпуклая функция, и доказана **формула Стирлинга**:

$$x! \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}.$$

$$3) e^x \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(\Gamma(x)). \quad \Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^{-1}.$$

## 3. Аппроксимация интегралов.

**Метод прямоугольников.** Пусть  $f$  — какая-нибудь функция на ограниченном отрезке  $[a \leq b]$  и пусть  $\varrho := (x_0, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k)$  — *пунктированное разбиение* отрезка  $[a < b]$ , т. е. такая система точек, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ ,  $p_i \in [x_{i-1}, x_i] \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

Число  $m(\varrho) := \max(|x_i - x_{i-1}| \mid i \in \{1, \dots, k\})$  будем называть *мелкостью* разбиения  $\varrho$ , а сумму  $\sigma(f, \varrho) := \sum_{i=1}^k f(p_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$  — *интегральной суммой (Римана) функции  $f$  относительно пунктированного разбиения  $\varrho$* .

**Формула прямоугольников.** Если функция  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , а  $|Df(x)| \leq c \forall x \in [a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma(f, \varrho) \right| \leq \frac{c}{2} m(\varrho) (b - a)$$

и, следовательно, для любой измельчающейся последовательности  $\varrho_n$

пунктированных разбиений отрезка  $[a, b]$  справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f, \varrho_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

◀ Пусть  $f_\varrho$  — функция, заданная следующими условиями:  $f_\varrho(t) = f(p_i)$ , если  $t \in [x_{i-1}, x_i[$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Легко видеть, что  $\int_a^b f_\varrho = \sigma(f, \varrho)$ . Поэтому

$$\int_a^b f - \sigma(f, \varrho) = \int_a^b (f - f_\varrho) = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t) - f(p_i)) dt.$$

Оценим  $i$ -е слагаемое, положив  $x_{i-1} = q$ ,  $p_i = p$ ,  $x_i = r$ . Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_q^r (f(t) - f(p)) dt \right| &\leq \int_q^r c|t - p| dt = c \left( \int_q^p (p - t) dt + \int_p^r (t - p) dt \right) = \\ &= \frac{c}{2} ((p - q)^2 + (r - p)^2) \leq \frac{c}{2} (r - q)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b f - \sigma(f, \varrho) \right| \leq \frac{c}{2} \sum_i (x_i - x_{i-1})^2 \leq \frac{c}{2} m(\varrho) \sum_i (x_i - x_{i-1}) = \frac{c}{2} m(\varrho) (b - a). \blacktriangleright$$

**Информация.** Второе заключение этой теоремы верно для любой ограниченной в основном непрерывной функции  $f$ , если отмеченные точки в каждом пунктированном разбиении  $\varrho_n$  выбраны вне множества  $K$ , на дополнении к которому функция  $f$  непрерывна.

Если функция  $f$  такова, что для каждой измельчающейся последовательности  $\varrho_n$  пунктированных разбиений отрезка  $[a \leq b]$  последовательность интегральных сумм  $\sigma(f, \varrho_n)$  имеет конечный предел, то говорят, что функция  $f$  *интегрируема по Риману* на отрезке  $[a, b]$ . В этом случае все такие пределы совпадают. Этот общий предел называют *интегралом Римана* функции  $f$ .

Для того, чтобы функция  $f$  была интегрируема по Риману на отрезке  $T$ , необходимо, чтобы этот отрезок и функция  $f$  на нем были ограничены. На ограниченном отрезке любая ограниченная непрерывная



функция, имеющая конечное множество точек разрыва, интегрируема по Риману и ее интеграл Римана совпадает с интегралом Ньютона.

**Метод Кеплера.** Для каждой функции  $f$ , определенной на отрезке  $[a < b] \subset \mathbb{R}$ , положим  $K_a^b(f) := (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))\frac{b-a}{6}$  (число Кеплера).

**Лемма Кеплера.** Для всякого полинома  $P(x)$  степени  $\leq 3$  справедливо равенство  $K_a^b(P) = \int_a^b P(x) dx$ .

◀ Если  $a = -h$ ,  $b = h$ , то формула есть результат простейшего вычисления. Общий случай сводится к предыдущему путем замены  $x = t + \frac{a+b}{2}$ . ▶

**Формула Кеплера—Симпсона.** Если  $|D^4 f(x)| \leq c \forall x \in [a \leq b]$ , то для любого разбиения  $\varrho := (a = x_0 < \dots < x_n = b)$  отрезка  $[a \leq b]$  имеем

$$\left| \int_a^b f dx - \sum_{i=1}^n K_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \right| \leq \frac{c}{2880} (m(\varrho))^4 (b-a).$$

◀ Допустим сначала, что  $n = 1$ , и положим  $q := \frac{a+b}{2}$ ,  $h = \frac{b-a}{2}$ . Пусть  $P(x)$  — полином Лагранжа—Эрмита функции  $f(x)$  относительно узлов интерполяции  $a, q, b$  и их кратностей 1, 2, 1. Поскольку  $|D^4 f(x)| \leq c$ , то согласно полученной в § 4.3 оценке дефекта интерполяции Лагранжа—Эрмита для каждого  $x \in [a \leq b]$  имеем

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{c}{4!} |x-a| |x-q|^2 |x-b| = \frac{c}{4!} (x-a)(x-q)^2 (b-x).$$

Так как  $P(a) = f(a)$ ,  $P(q) = f(q)$ ,  $P(b) = f(b)$ , а степень полинома  $A$  не выше 3, то из леммы Кеплера и указанной оценки получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - K_a^b(f) \right| &= \left| \int_a^b f(x) dx - K_a^b(P) \right| = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b P(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_a^b (f(x) - P(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)| dx \leq \frac{c}{4!} \int_a^b (x-a)(x-q)^2 (b-x) dx \stackrel{x=t+q}{=} \\ &\stackrel{x=t+q}{=} \frac{c}{4!} \int_{-h}^h (h+t)t^2(h-t) dt = \frac{c}{4!} 2 \int_0^h (h^2 - t^2)t^2 dt = \\ &= 2 \frac{c}{4!} h^5 \frac{2}{15} = \frac{c}{2880} (2h)^5 = \frac{c}{2880} (b-a)^5. \end{aligned}$$

Применив полученную оценку к каждому отрезку разбиения  $\varrho$ , будем иметь

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n K_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - K_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{c}{2880} (x_i - x_{i-1})^5 \leq \frac{c}{2880} (m(\varrho))^4 \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{c}{2880} (m(\varrho))^4 (b-a). \blacktriangleright$$

**Упражнение. Теорема о единственности интеграла.** Пусть  $\Phi$  — какое-нибудь множество в основном непрерывных функций на промежутке  $T \subset \mathbb{R}$ , содержащее все константы, и пусть каждой функции  $f \in \Phi$  и каждой паре точек  $a, b \in T$  сопоставлено число  $S_a^b f \in \mathbb{R}$ , причём

- 0)  $S_a^b f = -S_b^a f \quad \forall f \in \Phi \quad \forall a, b \in T$ ,
- 1)  $S_a^c f = S_a^b f + S_b^c f \quad \forall f \in \Phi \quad \forall a, b, c \in T$ ,
- 2) если  $f, g \in \Phi$  и  $f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a \leq b]$ , то  $S_a^b f \leq S_a^b g$ ,
- 3) если  $f = \text{const}$  на  $[a \leq b]$ , то  $S_a^b f = (b-a)f(a)$ ,
- 4) для каждой функции  $f \in \Phi$  и любой точки  $a \in T$  функция  $S_a^x f$  переменной  $x$  непрерывна на промежутке  $T$ .

Тогда всякая функция  $f \in \Phi$  интегрируема (по Ньютону) на любом отрезке  $[a, b] \subset T$  и  $S_a^b f = \int_a^b f(t)dt$ .

## Глава 6. ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Элементы пространства  $\mathbb{R}^n$  суть упорядоченные наборы вида  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , где  $x_i \in \mathbb{R}$ . В зависимости от геометрических и физических ассоциаций их называют либо точками, либо векторами. Число  $x_i$  из набора  $x$  называют  $i$ -й *координатой* точки (вектора)  $x$ .

Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Положим  
 $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$  — *сумма* векторов  $x$  и  $y$ ,  
 $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$  — *произведение* вектора  $x$  на число  $\lambda$ ,  
 $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$  — *скалярное произведение* векторов  $x$  и  $y$ ,  
 $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  — *модуль* вектора  $x$ . Число  $|x - y|$  называют *расстоянием* между точками  $x$  и  $y$ .

Известно, что  $\langle x, y \rangle \leq |x||y|$  (неравенство Коши), а также что  $|x + y| \leq |x| + |y|$  и  $||x| - |y|| \leq |x - y|$  (неравенства треугольника).

Отображения вида  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  обычно называют *вектор-функциями*. Всякое такое отображение представляет собой упорядоченный набор вещественных функций  $(f_1, \dots, f_n)$ , определенных на множестве  $T$ . Функ-

ция  $f_i$  из этого набора сопоставляет каждой точке  $t \in T$   $i$ -ю координату точки  $f(t)$ . Таким образом,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Функцию  $f_i$  называют  $i$ -й координатой (компонентой) вектор-функции  $f$ .

В этой главе изучаются только вектор-функции одной вещественной переменной. Функцию  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , заданную на числовом промежутке  $T$ , часто называют либо путём, либо движением, либо параметризованной линией (кривой).

При употреблении терминов "путь" или "движение" значение  $f(t)$  называют положением точки в момент времени  $t$ , а множество значений  $f(T)$  — траекторией движения (пути)  $f$ .

**Примеры.** 0)  $f(t) = x \in \mathbb{R}^n \forall t \in T$ . В этом случае функцию  $f$  называют стационарным путём (движением). Траектория  $f(T)$  этого пути есть одноточечное множество  $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Движение (путь)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , определяемое формулой  $f(t) = p + tv$ , где  $p, v \in \mathbb{R}^n$ , называют равномерно прямолинейным, а вектор  $v$  — скоростью движения  $f$ . Если  $v \neq 0$ , то траектория этого движения есть прямая, проходящая через точку  $p$  параллельно вектору  $v$ .

2. Отображение  $s(t) = re^{it} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, r > 0$ , интерпретируют как вращение точки  $s$  вокруг центра  $0 \in \mathbb{C}$  с постоянной угловой скоростью. Траектория этого движения представляет собой окружность радиуса  $r$ . График  $\Gamma_s$  отображения  $s$  есть множество  $\{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos t, y = \sin t\}$ , т. е. траектория винтового движения  $v(t) = (t, \cos t, \sin t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  (винтовая линия).

**Упражнение.** Нарисовать траектории следующих путей:

$$a(t) = te^{it} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C} \text{ (спираль Архимеда),}$$

$$l(t) = e^{t+it} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ (логарифмическая спираль),}$$

$$c(t) = t + i + ie^{-it} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ (циклоида),}$$

$$k(t) = (1 + \cos t)e^{it} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ (кардиоида).}$$

Пусть  $f = (f_1, \dots, f_n) : T \rightarrow \mathbb{R}^n, T \subset \overline{\mathbb{R}}$ , — произвольная вектор-функция. Будем говорить, что функция  $f(t)$  стремится к  $x \in \mathbb{R}^n$  при  $t$ , стремящемся к  $p$  по множеству  $S$ , и писать  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow p|S]{} x$ , если  $|f(t) - x| \xrightarrow[t \rightarrow p|S]{} 0$ .

#### 0. Координатный критерий сходимости

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow p|S]{} x \Leftrightarrow f_i(t) \xrightarrow[t \rightarrow p|S]{} x_i \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

◀ Следствие известных (каких?) теорем теории пределов и следующих соотношений:  $|f_i(t) - x_i| \leq |f(t) - x| = \sqrt{\sum_j |f_j(t) - x_j|^2}$ . ▶

**Упражнение.** Для вектор-функции вещественной переменной дать определения непрерывности, дифференцируемости, производной, дифференциала, первообразной, интеграла и доказать следующие три утверждения.

**Координатный критерий непрерывности.** Функция  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывна в точке  $p \in T$  в том и только в том случае, когда каждая ее компонента  $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $p$ .

**Координатный критерий дифференцируемости.** Функция  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  дифференцируема в точке  $t \in T$  в том и только в том случае, когда каждая ее компонента  $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}$  дифференцируема в точке  $t$ . В этом случае  $Df(t) = (Df_1(t), \dots, Df_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ ,  $df(t) = (df_1(t), \dots, df_n(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Координатный критерий интегрируемости.** Вектор-функция  $f = (f_1, \dots, f_n)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  в том и только в том случае, когда каждая ее компонента  $f_i$  интегрируема на  $[a, b]$ . В этом случае  $\int_a^b f(t) dt = (\int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt)$ .

**Теорема Коши о среднем.** Если вектор-функция  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a < b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывна на ограниченном отрезке  $[a < b]$  и дифференцируема в каждой его внутренней точке, то на интервале  $]a, b[$  найдется такая точка  $s$ , что векторы  $D\varphi(s)$  и  $\varphi|_a^b$  параллельны.

◀ Заключение теоремы Коши равносильно следующему условию:  $\det(D\varphi(s), \varphi|_a^b) = 0$ , где  $(D\varphi(s), \varphi|_a^b)$  —  $(2 \times 2)$ -матрица, чьи столбцы суть рассматриваемые векторы. Функция  $\delta(t) := \det(\varphi|_a^t, \varphi|_a^b)$ , будучи полиномом от своих компонент, непрерывна на отрезке  $[a < b]$  и дифференцируема в каждой внутренней точке этого отрезка, причем  $D\delta(t) := \det(D\varphi(t), \varphi|_a^b)$ . Кроме того,  $\delta(a) = \delta(b) = 0$ . По теореме Ролля имеется такая точка  $s \in ]a < b[$ , что  $D\delta(s) = 0$ . ▶

**Упражнения.** 1. Если формулировка какой-либо теоремы из предшествующих глав остается осмысленной, в то время как все или некоторые участвующие в ней функции предполагаются  $\mathbb{R}^n$ -значными, то эта теорема верна. Исключения представляют теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем. Привести примеры их невыполнения. Приводившиеся доказательства обобщаемых теорем пригодны и в новой ситуации. Здесь исключения представляют доказательства теоремы о приращении и принципа сравнения в теории интеграла.

2. Вывести принцип сравнения для вектор-функций, опираясь на координатный критерий интегрируемости и принцип сравнения для вещественных функций.

**Лемма о спуске.** Пусть  $u : [a \leq b] \rightarrow \mathbb{R}$  — такая непрерывная функция и  $K$  — такое конечное множество, что для всякого  $t \in [a, b] \setminus K$  на полуинтервале  $]t, b[$  найдется точка  $x$ , для которой выполнено неравенство  $u(x) \leq u(t)$ . Тогда  $u(b) \leq u(a)$ .

◀ Допустим, что  $u(a) < u(b)$ . Поскольку множество  $u(K)$  конечно, то множество  $]u(a) < u(b)[ \setminus u(K)$  непусто. Пусть  $z$  — какая-нибудь точка этого множества. Тогда множества  $K$  и  $S := u^{-1}(z)$  не пересекаются. Множество  $S$  содержит максимальный элемент (теорема Больцано—Коши § 3.2.). Обозначим этот элемент буквой  $t$ . Поскольку  $u(t) = z < u(b)$ , а  $t = \max S$ , то  $t < b$ , а интервал  $]t < b[$  не содержит представителей множества  $S$ . Поэтому из теоремы Больцано—Коши следует, что для всякого  $x \in ]t < b[$   $u(t) < u(x)$ . Значит, на интервале  $]t < b[$  нет точки  $x$  с указанным в условии леммы свойством, несмотря на то, что  $t \in [a, b] \setminus K$ , — противоречие. ▶

**Теорема о приращениях.** Если вектор-функция  $f$  и вещественная функция  $h$  непрерывны на отрезке  $[a \leq b]$  и если  $|Df(t)| \leq Dh(t)$  для всех  $t$  из  $[a, b]$  за исключением, быть может, некоторого конечного множества  $K$ , то  $|f|_a^b \leq h|_a^b$ .

◀ Пусть  $T := ]a \leq b[ \setminus K$  и пусть  $K$  содержит концы рассматриваемого отрезка.

1. Допустим сначала, что для каждого  $t \in T$  выполнено строгое неравенство  $|Df(t)| < Dh(t)$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow t} \left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \right| < \lim_{x \rightarrow t} \frac{h(x) - h(t)}{x - t}.$$

Поэтому согласно ТНП (§ 2.1)

$$\frac{|f(x) - f(t)|}{|x - t|} \underset{x \rightarrow t}{<} \frac{h(x) - h(t)}{x - t},$$

и потому на интервале  $]t < b[$  отыщется такая точка  $x_t$ , что  $|f(x_t) - f(t)| < h(x_t) - h(t)$ .

Для каждого  $x \in [a, b]$  положим  $u(x) := |f|_a^x - h|_a^x$ . Благодаря только что установленному неравенству для каждой точки  $t \in T$  имеем

$$u(x_t) - u(t) = |f|_a^{x_t} - |a|_a^t - h|_t^{x_t} \leq |f|_t^{x_t} - h|_t^{x_t} < 0.$$

Поэтому согласно лемме о спуске  $0 \geq u|_a^b = u(b) = |f|_a^b - h|_a^b$ .

2. Общий случай. Пусть  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим функцию  $h_\varepsilon(t) := h(t) + \varepsilon \arctan(t)$ . Эта функция непрерывна на  $[a, b]$  и  $|Df(t)| <$

$Dh_\varepsilon(t)$  при любом  $t \in T$ . В такой ситуации, как показано в п. 1,  $|f|_a^b \leq h_\varepsilon|_a^b \leq h|_a^b + \varepsilon\pi$  для всякого  $\varepsilon > 0$ . ►

**Упражнение.** Теорема о приращениях справедлива и для односторонних производных.

## Приложения

**1. Длина пути.** Пунктирной линией (пунктиром) в пространстве  $\mathbb{R}^n$  будем называть конечную последовательность его точек. Длинной пунктира  $p_0, p_1, \dots, p_k$  будем называть число  $\sum_{i=1}^k |p_i - p_{i-1}|$ . Будем говорить, что такой пунктир согласован с путем  $\varphi : [a < b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , если имеется такое разбиение  $\tau = (t_0 = a \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b)$  отрезка  $[a, b]$ , что  $p_i = \varphi(t_i), \forall i$ . Верхнюю грань длин всевозможных пунктиров, согласованных с путем  $\varphi$ , называют длиной этого пути.

**Теорема.** Если путь  $\varphi : [a \leq b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  непрерывен и функция  $|\varphi'|$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то длина этого пути равна  $\int_a^b |\varphi'(t)| dt$ .

◀ Буквами  $t, x, y, z$  будем обозначать точки отрезка  $[a, b]$ . Для каждой пары точек  $x \leq y$  длину пути  $\varphi : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}^n$  будем обозначать символом  $S_x^y$ , а для всякого набора точек  $\tau = (t_0 \leq \dots \leq t_k)$  длину пунктира  $(\varphi|\tau) := (\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_k))$  будем обозначать  $l(\varphi|\tau)$ .

1) Если  $x \leq y \leq z$ , то  $S_x^z = S_x^y + S_y^z$ .

◁ Пусть  $\tau = (t_0 \leq \dots \leq t_k)$  — произвольное разбиение отрезка  $[x, z]$  и  $j$  — такой номер, что  $t_{j-1} \leq y \leq t_j$ . Пусть  $\tau' := (t_0, \dots, t_{j-1}, y)$  и  $\tau'' := (y, t_j, \dots, t_k)$ . Тогда  $l(\varphi|\tau) \leq l(\varphi|\tau') + l(\varphi|\tau'') \leq S_x^y + S_y^z$  и, стало быть,  $S_x^z \leq S_x^y + S_y^z$ .

Докажем противоположное неравенство. Пусть  $\tau' = (t'_0 \leq \dots \leq t'_k)$  и  $\tau'' = (t''_0 \leq \dots \leq t''_l)$  — произвольные разбиения отрезков  $[x, y]$  и  $[y, z]$  соответственно и пусть  $\tau := (t'_0, \dots, t'_k, t''_0, \dots, t''_l)$ . Тогда  $l(\varphi|\tau') + l(\varphi|\tau'') \leq l(\varphi|\tau) \leq S_x^z$ . Следовательно,  $S_x^y + S_y^z \leq S_x^z$ . ▽

2) Если  $x \leq y$ , то

$$\left| \int_x^y \varphi' \right| \leq S_x^y \leq \int_x^y |\varphi'|.$$

◁ Левый интеграл в этой формуле определен, ибо функция  $|\varphi'|$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и, следовательно, производная  $\varphi'$  определена в основном во всех точках этого отрезка и потому функция  $\varphi$ , будучи непрерывной, является ее обобщенной первообразной.

Пусть  $\tau = (t_0 \leq \dots \leq t_k)$  — произвольное разбиение отрезка  $[x, y]$ . Тогда

$$\left| \int_x^y \varphi' \right| = |\varphi_x^y| \leq \sum_i |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| = l(\varphi|\tau) =$$

$$= \sum_i \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi' \right| \leq \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\varphi'| = \int_x^y |\varphi'|.$$

Следовательно, число  $S_x^y$ , будучи верхней гранью чисел вида  $l(\varphi, \tau)$  расположено между рассматриваемыми интегралами.  $\triangleright$

Пусть  $G(x) := S_a^x$  для каждого  $x \in [a, b]$ .

3) Функция  $G$  непрерывна.

$\triangleleft$  Из пп. 1 и 2 следует, что

$$\left| \int_x^y \varphi' \right| \leq |G(y) - G(x)| \leq \left| \int_x^y |\varphi'| \right| \quad (*)$$

при любом расположении точек  $x, y$ . Поскольку интеграл как функция верхнего предела непрерывен, то  $|G(y) - G(x)| \xrightarrow{y \rightarrow x} 0$  согласно теореме о пределе промежуточной функции. Значит, функция  $G$  непрерывна в каждой точке  $x \in [a, b]$ .  $\triangleright$

4)  $G'(t) = |\varphi'(t)| \forall t \in [a, b]$ .

$\triangleleft$  Пусть  $F$  и  $H$  — какие-нибудь обобщенные первообразные функций  $\varphi'$  и  $|\varphi'|$ , соответственно;  $K$  — такое конечное множество, что  $F'(t) = \varphi'(t)$  и  $H'(t) = |\varphi'(t)|$  для любой точки  $t \in [a, b] \setminus K$ ; и пусть  $t_0$  — одна из таких точек. Из неравенств (\*) и формулы Н-Л, следует, что для всякого  $t \neq t_0$  выполнены неравенства

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \right| \leq \frac{G(t) - G(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{H(t) - H(t_0)}{t - t_0}.$$

Крайние дроби в этой формуле стремятся к  $|\varphi'(t_0)|$  при  $t \rightarrow t_0$ . Следовательно, то же происходит и со средней дробью. Значит,  $G'(t_0) = |\varphi'(t_0)| \forall t_0 \in [a, b] \setminus K$ .

Из пп. 3 и 4 следует, что  $G$  есть обобщенная первообразная для функции  $|\varphi'|$  и потому  $\int_a^b |\varphi'| dt = G(b) - G(a) = S_a^b$ .  $\blacktriangleright$

**2. Площадь криволинейного сектора.** Для каждого множества  $M$  плоскости  $\mathbb{R}^2$  обозначим символом  $\nabla(M)$  множество  $\bigcup_{z \in M} [0, z]$  и назовем его *сектором (конусом)* с основанием  $M$  и вершиной  $0 \in \mathbb{R}^2$ .

Пусть  $z : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  — вектор-функция (движение), определенная на промежутке  $T \subset \mathbb{R}$ . Для любых  $t, x \in T$  сектор  $\nabla(z([t, x]))$ , основанием которому служит часть  $z([t, x])$  траектории движения  $z$ , обозначим символом  $\nabla_t^x$ , а его площадь — символом  $A_t^x$ . Секториальной



скоростью движения  $z$  называют функцию  $\hat{z}$ , определяемую формулой  $\hat{z}(t) := \lim_{x \rightarrow t} \frac{A_t^x}{|x-t|}$ . ( $\text{Dom } \hat{z} \subset \text{Dom } z$ .)

Вспомним, что всякую точку  $z$  плоскости  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  можно представить в виде  $z = \varrho e^{i\theta} = \varrho \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $\varrho \geq 0$ . Пару чисел  $(\varrho, \theta)$  в этом случае называют *полярными координатами* точки  $z$  ( $\varrho$  — *радиальная координата*,  $\theta$  — *угловая координата*).

Пусть рассматриваемая функция  $z : T \rightarrow \mathbb{R}^2$  имеет следующее (полярное) представление:  $z(t) = \varrho(t)e^{i\theta(t)}$ , где  $\varrho$  — непрерывная неотрицательная функция, а  $\theta$  — возрастающая дифференцируемая функция.

**Теорема о секториальной скорости.** В рассматриваемой ситуации для каждой точки  $t \in T$  существует предел  $\lim_{x \rightarrow t} \frac{A_t^x}{|x-t|} := \hat{z}(t)$ , причём

$$\text{I. } \hat{z} = \frac{1}{2} \varrho^2 \cdot \theta';$$

II. а если к тому же функция  $z$  дифференцируема, то  $\hat{z} = \frac{1}{2} \det(z, z') = \frac{1}{2}(xy' - yx')$ . Здесь  $x$  и  $y$  — такие вещественные функции на  $T$ , что  $z = x + iy$ .

◀ I. Пусть  $t \in T$ . Для каждого  $x \in T$  положим:

$$u(x) = \inf\{\varrho(\tau) : \tau \in [t, x]\};$$

$$h(x) = \sup\{\varrho(\tau) : \tau \in [t, x]\};$$

$$U_x = \bigcup_{\tau \in [t, x]} [0, u(x)e^{i\theta(\tau)}];$$

$$H_x = \bigcup_{\tau \in [t, x]} [0, h(x)e^{i\theta(\tau)}].$$

(Множества  $U_x$  и  $H_x$  являются секторами кругов радиусов  $u(x)$  и  $h(x)$  раствора  $\theta(x) - \theta(t)$ .)

Так как  $U_x \subset \nabla_t^x \subset H_x$ , то  $\mu U_x \leq A_t^x \leq \mu H_x$ . Следовательно, если раствор  $|\theta(x) - \theta(t)| < \pi$ , то

$$\frac{(u(x))^2 |\theta(x) - \theta(t)|}{2|x-t|} \leq \frac{A_t^x}{|x-t|} \leq \frac{(h(x))^2 |\theta(x) - \theta(t)|}{2|x-t|}.$$

Поскольку функция  $\varrho$  непрерывна, а функция  $\theta$  дифференцируема, то крайние дроби в этих неравенствах стремятся к  $\frac{\varrho^2(t)}{2} |\theta'(t)|$  при  $x \rightarrow t$  (лемма о непрерывности огибающих § 3.1) и, значит, то же происходит со средней дробью. Остается заметить, что  $|\theta'| = \theta'$ .

II. В рассматриваемой ситуации  $\varrho = ze^{-i\theta}$  и потому функция  $\varrho$  дифференцируема. Следовательно,  $\det(z, z') = \det(\varrho e^{i\theta}, \varrho' e^{i\theta} + \varrho e^{i\theta} i\theta') = \det(\varrho e^{i\theta}, \varrho' e^{i\theta}) + \det(\varrho e^{i\theta}, \varrho e^{i\theta} i\theta') =$

$$= \varrho^2 \theta' \det(e^{i\theta}, i e^{i\theta}) = \varrho^2 \theta' \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \varrho^2 \theta' = 2\hat{z}. \blacktriangleright$$

**Теорема.** Если в рассматриваемой ситуации  $T = [a \leq b]$ , причём  $\theta(b) - \theta(a) \leq 2\pi$ , то

$$\mu(\nabla(z([a, b]))) = \int_a^b \hat{z}(t) dt.$$

◀ 1. Пусть  $s \leq t \leq u$  — произвольная возрастающая тройка точек отрезка  $T$ . Так как функция  $\theta$  возрастает, а  $\theta(b) - \theta(a) \leq 2\pi$ , то пересечение секторов  $\nabla_s^t$  и  $\nabla_t^u$  есть отрезок  $[0, z(t)]$ , и потому площадь объединения этих секторов равна сумме их площадей, т. е.  $A_s^u = A_s^t + A_t^u$ .

2. Пусть  $F(t) := A_a^t$ . Из п. 1 следует, что для любой пары различных точек  $t, x \in T$  выполняется равенство  $\frac{F(x) - F(t)}{x - t} = \frac{A_t^x}{|x - t|}$ . Поэтому согласно теореме о секториальной скорости  $D_+ F(t) = \hat{z}(t) \forall t \in [a, b]$  и  $D_- F(t) = \hat{z}(t) \forall t \in [a, b]$ .

Следовательно, функция  $F$  является обобщённой первообразной функции  $\hat{z}$  на отрезке  $[a, b]$  и потому  $\int_a^b \hat{z} dt = F|_a^b = A_a^b$ . ▶

**Следствие.** Пусть сектор  $\nabla \subset \mathbb{R}^2$  задан в полярных координатах  $(\varrho, \theta)$  условиями  $\varrho \leq r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , где  $r$  — непрерывная неотрицательная функция, а  $\beta - \alpha \leq 2\pi$ . Тогда

$$\mu(\nabla) = \int_\alpha^\beta \frac{r^2(\theta)}{2} d\theta.$$

(Говорят, что множество  $M \subset \mathbb{R}^2$  задано в полярных координатах  $(\varrho, \theta)$  условием  $\mathcal{P}(\varrho, \theta)$ , если  $M = \{z = \varrho e^{i\theta} : \mathcal{P}(\varrho, \theta)\}$ .)

◀  $\nabla = \nabla(z([\alpha, \beta]))$ , где функция  $z : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  определяется равенством  $z(t) = r(t)e^{it}$ . Значит, площадь сектора  $\nabla$  равна  $\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(t) dt$ . ▶

**Упражнение.** Найти площадь фигуры, ограниченной:

с) аркой циклоиды и осью абсцисс;

к) кардиоидой.

(В первом случае воспользоваться формулой  $\hat{z} = \det(z, z')$ , а во втором — задать кардиоиду уравнением в полярных координатах.)

**3. Работа силового векторного поля.** Пусть  $\Omega$  — область физического пространства, снабжённая прямоугольной системой координат. Это позволяет считать её частью пространства  $\mathbb{R}^3$ . Кроме того, пусть выбрана какая-либо система единиц измерения физических величин,

что даст возможность представлять всякую силу вектором, т. е. элементом пространства  $\mathbb{R}^3$ , а производимую работу выражать вещественным числом.

Пусть на протяжении некоторого промежутка времени  $T \subset \mathbb{R}$  в области  $\Omega$  перемещается какая-то материальная точка, причём известно, что если она находится в положении  $x \in \Omega$ , то на неё действует сила  $w(x) \in \mathbb{R}^3$ . В такой ситуации функцию  $w(x)$  переменной  $x$  обычно называют силовым векторным полем. Поскольку поле  $w$  действует на движущуюся материальную точку, то оно производит некоторую работу. Пусть, наконец, известна функция  $\varphi : T \rightarrow \Omega$ , описывающая движение рассматриваемой точки, т. е. такая функция, что в момент времени  $t$  наша материальная точка находится в положении  $\varphi(t)$ . Работу, произведённую полем  $w$  при перемещении  $\varphi$  с момента времени  $a$  до момента  $b$ , будем обозначать  $A_w(\varphi; a, b)$ .

Эксперимент приводит к следующим гипотезам:

1) работа  $A_w(\varphi; a, b)$  как функция упорядоченной пары чисел  $(a, b)$  аддитивна:

$$\forall a, b, c \in T \quad A_w(\varphi; a, c) = A_w(\varphi; a, b) + A_w(\varphi; b, c).$$

2)  $A_w(\varphi; t, u) = \langle w(\varphi(t)), \varphi(u) - \varphi(t) \rangle + \beta(u, t)$ , где  $\beta(u, t) \underset{u \rightarrow t}{=} o(u - t)$ .

**Теорема.** Если рассматриваемое движение  $\varphi : T \rightarrow \Omega$  является дифференцируемой функцией на промежутке  $T$ , то при выполнении гипотез 1 и 2 для любых  $a, b \in T$  справедлива формула

$$A_w(\varphi; a, b) = \int_a^b \langle w(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt.$$

◀ Пусть  $F(t) := A_w(\varphi; a, t)$  и  $\alpha(t) := \langle w(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle$  при любом  $t \in T$ . Из условий 1) и 2) вытекает, что

$$\frac{F(u) - F(t)}{u - t} = \frac{A_w(\varphi; t, u)}{u - t} \underset{u \rightarrow t}{\rightarrow} \alpha(t).$$

Следовательно, функция  $F$  служит обобщённой первообразной для функции  $\alpha$  на  $T$  и потому  $\int_a^b \alpha dt = F(b)$ . ▶

**4. Декарт, Кеплер, Гук, Ньютон и закон всемирного тяготения.** В те годы, когда Ньютон разрабатывал дифференциальное исчисление, Роберт Гук в одной из бесед с Ньютоном изложил ему следующую проблему: многочисленные опыты говорят о том, что сила

притяжения тела  $A$  телом  $B$  пропорциональна произведению масс этих тел, направлена от  $A$  к  $B$ , но никакие лабораторные ухищрения не дают ответа о математической зависимости этой силы от расстояния между телами. Однако думается, что сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния между  $A$  и  $B$ .

К тому времени наука была обогащена методом координат Декарта и эмпирическими законами Кеплера движения планет. Кроме того, сам Ньютон установил основные принципы механики и дифференциального исчисления.

**Первые два закона Кеплера.** Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого расположено Солнце, а секториальная скорость движения планеты постоянна.

**Закон движения Ньютона.** Пусть выбрана какая-нибудь система измерения физических величин и в рассматриваемой области пространства введена прямоугольная система координат. Тогда, если в этой области движется материальная точка  $z$  массы  $m$  и в каждый момент времени  $t$  на нее действует лишь одна сила  $w(t)$ , то  $w = mz''$ .

**Полярное уравнение эллипса.** Пусть  $Z$  — эллипс на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , фокусы которого суть точки  $p = (0, 0)$  и  $q = (x, 0)$ ,  $x \geq 0$ , а сумма расстояний от любой точки  $z \in Z$  до его фокусов равна  $d > x$ . Тогда для полярных координат  $(\varrho, \theta)$  любой точки  $z = \varrho e^{i\theta} \in Z$  имеет место равенство

$$\varrho = \frac{h}{1 - \varepsilon \cos \theta},$$

где  $\varepsilon := \frac{x}{d}$  — эксцентриситет эллипса,  $h$  — расстояние от фокуса  $p$  до точки  $w$  пересечения эллипса с осью ординат.

◀ Это уравнение нетрудно вывести из следующих соотношений:

$$\varrho + |z - q| = d = h + |w - q|,$$

$$|w - q|^2 = h^2 + x^2, \text{ (теорема Пифагора)}$$

$$|z - q|^2 = \varrho^2 + x^2 - 2\varrho x \cos \theta, \text{ (теорема косинусов)}. \blacktriangleright$$

**Теорема Ньютона о кеплеровом движении.** Пусть  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  — такая дважды дифференцируемая вектор-функция (движение планеты), что траектория этого движения есть эллипс, а секториальная скорость относительно одного из фокусов (Солнца) постоянна. Тогда

$$z'' = -C \frac{z}{|z|^3},$$

где  $C$  — положительная константа.

◀ В плоскости эллипса  $Z := z(T)$  введём прямоугольную систему координат так, чтобы Солнце оказалось в начале координат, другой фо-

кус — на положительной полуоси абсцисс, а угловая скорость движения  $z(t)$  была положительной функцией. Это позволит отождествить плоскость эллипса с плоскостью  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  и представить функцию  $z$  в виде  $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$ . Кроме того, функции  $\rho$  и  $\theta$  будут связаны равенствами

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - \varepsilon \cos \theta}{h}, \quad \rho^2 \theta' = 2\dot{z} = \text{const.}$$

Дифференцируя эти равенства, видим, что

$$\rho' = -\frac{2\dot{z}}{h} \varepsilon \sin \theta, \quad \rho'' = -\frac{4\dot{z}^2}{h\rho^2} \varepsilon \cos \theta, \quad 2\rho'\theta' + \rho\theta'' = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} z'' &= (\rho e^{i\theta})'' = (\rho'' e^{i\theta} + 2\rho'(e^{i\theta})' + \rho(e^{i\theta})'') = \\ &= (\rho'' - (\theta')^2 \rho + i(\rho'\theta' + \rho\theta'')) e^{i\theta} = (\rho'' - (\theta')^2 \rho) e^{i\theta} = \left(-\frac{4\dot{z}^2}{h\rho^2} \varepsilon \cos \theta - \frac{4\dot{z}^2}{\rho^3}\right) e^{i\theta} = \\ &= -\frac{4\dot{z}^2}{h\rho^2} e^{i\theta} = -C \frac{z}{|z|^3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Следствие.** Если  $z$  — движение планеты массы  $m$  вокруг Солнца, то согласно ньютонову закону движения и полученной формуле сила солнечного притяжения равна  $mz'' = -mC \frac{z}{|z|^3}$ , и, стало быть, ее абсолютная величина равна  $\frac{cm}{|z|^2}$ .

В результате изумительных экспериментальных и математических открытий Кеплера и Ньютона гипотеза Гука стала законом всемирного тяготения Ньютона.

## Дополнения

### 1. Счетные множества.

Множество  $S$  будем называть счетным, если существует сюръективное отображение (нумерация)  $\nu : M \rightarrow S$ ,  $M \subset \mathbb{N}$ . Многие называют такие множества не более чем счетными.

**Примеры и замечания.** 0. Подмножество счетного множества счетно и, стало быть, всякое конечное множество (§0.2.) счетно.

1. При любом отображении образ счетного множества счетен.

2. Для каждого непустого счетного множества  $S$  существует нумерация вида  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow S$ .

3. Множество  $\mathbb{N}^2$  счетно.

◁ Отображение  $\beta : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ , задаваемое формулой  $\beta(m, n) = (\text{количество таких пар } (i, j) \in \mathbb{N}^2, \text{ что } i + j < m + n) + m = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m$ , биективно. ▷

4. Объединение счтного семейства счтных множеств счтно.

◁ Пусть  $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ , где  $S_i$  — счтное непустое множество для всякого индекса  $i \in I$ , причсм множество индексов  $I$  также счтно и непусто. Тогда имеется нумерация  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow I$  и семейство нумераций  $\beta_i : \mathbb{N} \rightarrow S_i \mid i \in I$ . Для каждой пары номеров  $(m, n)$  положим  $\gamma(m, n) = \beta_{\alpha(m)}(n)$ . Нетрудно понять, что отображение  $\gamma : \mathbb{N}^2 \rightarrow S$  сюръективно. ▷

5. Множества  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$  счтны.

6. Всякий непустой интервал  $I$  числовой прямой несчтен.

◁ Пусть  $x : \mathbb{N} \rightarrow I$  — произвольное отображение (последовательность),  $T_0$  — какой-нибудь невырожденный (неодноточечный) отрезок, содержащийся в  $I \setminus \{x_0\}$ ,  $T_1$  — какой-нибудь невырожденный отрезок, содержащийся в  $T_0 \setminus \{x_1\}$ , ...,  $T_n$  — какой-нибудь невырожденный отрезок, содержащийся в  $T_{n-1} \setminus \{x_n\}$ , ... . Пересечение такой последовательности непусто (§ 0.1.) и не содержит точек вида  $x_n$ . Значит, отображение  $x$  несюръективно и потому интервал  $I$  несчтен. ▷

7. Множество точек разрыва монотонной функции счтно.

## 2. Теорема о приращениях и интеграл (Ньютона)

Если всюду в главах 5 и 6 термин "конечный", относящийся к слову "множество", заменить термином "счтный", то легко убедиться, что доказательства леммы о спуске и теоремы о приращениях, приведенные в главе 6, сохраняют силу для указанных преобразований этих утверждений. Затем столь же просто установить истинность модернизированной теории глав 5 и 6. Главная цель такого усовершенствования теории интеграла состоит в получении более сильных теорем о взаимосвязи операций интегрирования и предела.

**Упражнения.** 1. В расширенной теории интеграла Ньютона функция Дирихле, определяемая условиями  $f(x) = 1$ , если  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 0$ , если  $x \notin \mathbb{Q}$ , интегрируема на отрезке  $\mathbb{R}$ . Каков ес интеграл?

2. Функция Дирихле неинтегрируема на отрезке  $[0, 1]$  как по Ньютону в узком смысле, так и по Риману.

3. Функция Дирихле в основном непрерывна в расширенном понимании этого термина, будучи разрывной в каждой точке.

### Список имён

Абель Нильс Хенрик (Abel) 1802 - 1829.  
Архимед, 287 - 212 до Р.Х.  
Безу (Bezout) Этьен, 1730 - 83.  
Бертран Жозеф Луи Франсуа, 1822 - 1900.  
Больцано (Bolzano) Бернард, 1781 - 1848.  
Вейерштрасс (Weierstrass) Карл Теодор Вильгельм, 1815 - 1897.  
Гейне Генрих Эдуард (Heine, 1821 - 1881.  
Гук (Hooke) Роберт, 1635 - 1703.  
Д'Аламбер (D'Alembert) Жан Лерон, 1717 - 1783.  
Декарт (Descartes) Рене, 1596 - 1650.  
Дирихле (Dirichlet) Петер Густав, 1805 - 1859.  
Кавальери (Cavalieri) Бонавентура, 1598 - 1647.  
Кеплер (Kepler) Иоганн, 1571 - 1630.  
Коши (Cauchy) Огюстен Луи, 1789 - 1857.  
Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи, 1736 - 1813.  
Ламберт (Lambert) Иоганн Генрих, 1728 - 1777.  
Лейбниц (Leibniz) Готфрид Вильгельм, 1646 - 1716.  
Линдеман Фердинанд, 1852 - 1939.  
Лиувиль (Liouville) Жозель, 1809 - 1882.  
Лопиталь (L'Hospital) Гийом, 1661 - 1704.  
Меркатор (Mercator) Николаус, ок. 1620 - 1687.  
Муавр (Moivre) Абрахам де, 1667 - 1754.  
Ньютон (Newton) Исаак, 1643 - 1727.  
Риман (Riemann) Бернхард, 1826 - 1866.  
Роль (Rolle) Мишель, 1652 - 1719.  
Симпсон Томас, 1710 - 61.  
Стирлинг (Stirling) Джеймс, 1692 - 1770.  
Тэйлор (Taylor) Брук, 1685 - 1731.  
Ферма (Fermat) Пьер, 1601 - 1665.  
Эйлер (Euler) Леонард, 1707 - 1783.  
Эрмит Шарль, 1822 - 1901.  
Юнг (Young) Томас, 1773 - 1829.

### Греческий алфавит

$\alpha$ <i>A</i>	$\beta$ <i>B</i>	$\gamma$ <i>Г</i>	$\delta$ <i>Δ</i>	$\epsilon$ <i>ε E</i>	$\zeta$ <i>Z</i>	$\eta$ <i>H</i>	$\theta$ <i>θΘ</i>
альфа	бета	гамма	дельта	эпсилон	дзэта	эта	тэта
$\iota$ <i>I</i>	$\kappa$ <i>K</i>	$\lambda$ <i>Λ</i>	$\mu$ <i>M</i>	$\nu$ <i>N</i>	$\xi$ <i>Ξ</i>	$\omicron$ <i>O</i>	$\pi$ <i>Π</i>
иота	каппа	лямбда	мю	ню	кси	омикрон	пи
$\rho$ <i>ρ P</i>	$\sigma$ <i>Σ</i>	$\tau$ <i>T</i>	$\phi$ <i>φ Φ</i>	$\chi$ <i>X</i>	$\psi$ <i>Ψ</i>	$\upsilon$ <i>Υ</i>	$\omega$ <i>Ω</i>
ро	сигма	тау	фи	хи	пси	ипсилон	омега



## Литература

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
2. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
3. Зорич В.А. Математический анализ. М.: МЦНМО, 1998. Ч. 1-2.
4. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Новосибирск. Изд-во Ин-та математики, 2000. Ч. 1, кн. 1-2.
5. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, III. М.: Гос-е изд-во физ.-мат. лит., 1958-1960. Т. 1-2.